VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANCÍ

Možnosti aplikace portfoliových hedgingových strategií

Possibilities of aplication of the portfolio hedging strategies

Student: Bc. Sylva Tesařová

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal

Ostrava 2010

Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci včetně všech příloh vypracovala samostatně.

V Ostravě dne 30. dubna 2010 ……………………………

Bc. Sylva Tesařová

Tímto bych chtěla poděkovat panu prof. Dr. Ing. Zdeňku Zmeškalovi za cenné rady, podněty a připomínky, které mi pomohly k vypracování diplomové práce.

V Ostravě dne 30. dubna 2010

Obsah

1 Úvod 3

2 Metody hedgingových strategií 5

2.1 Základní pojmy 5

2.1.1 Vymezení finančního rizika 5

2.1.2 Typy pozic 7

2.1.3 Subjekty finančního trhu 8

2.2 Charakteristika hedgingových strategií 9

2.2.1 Faktorově neutrální přístup 11

2.2.2 Minimalizace rozptylu 14

2.2.3 Minimalizace hodnoty Value at Risk 15

2.2.4 Minimalizace střední hodnoty ztráty 17

2.2.5 Maximalizace střední hodnoty funkce užitku 17

2.2.6 Nezajištěné portfolio 18

2.3 Popis finančních derivátů 19

2.3.1 Forward 21

2.3.2 Futures 23

2.3.3 Swap 25

2.3.4 Opce 26

2.4 Lagrangeův multiplikační teorém 33

3 Charakteristika a stanovení parametrů finančních instrumentů 35

3.1 Druhy rozdělení pravděpodobnosti 35
3.1.1 Normální rozdělení 36
3.1.2 Studentovo t-rozdělení 37
3.2 Modely stanovení volatility 38
3.2.1 Historický přístup 39
3.2.2 Adaptační metody 39
3.3 Popis metody simulace Monte Carlo 41
3.3.1 Stochastické procesy 41
3.3.2 Mean reversion procesy 44
3.3.3 Generování náhodných čísel 44
3.4 Statistické stanovení parametrů a simulace cen vybraných aktiv 45
3.4.1 Propočet parametrů aktiv 46
3.4.2 Simulace cen aktiv 50
4 Ověření vybraných hedgingových strategií 53
4.1 Vstupní informace 53
4.2 Ocenění zajišťovacích instrumentů 54
4.3 Nalezení optimálního množství zajišťovacích instrumentů 55
4.4 Aplikace hedgingových strategií 57
4.5 Kriteriální zhodnocení zvolených hedgingových strategií 61
5 Závěr 64
Seznam použité literatury 66

Seznam zkratek

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Seznam příloh

1 Úvod

Veškeré subjekty, které provádějí jakoukoliv ekonomickou činnost nebo se pouze pohybují na finančních trzích z důvodu obchodování s finančními nástroji, jsou vystaveny nějakému druhu finančního rizika. Finanční riziko existuje v mnoha podobách. Společnou podstatou, jež ovlivňuje chování všech investorů, je nemožnost přesně odhadnout vývoj cen finančních nástrojů do budoucna. Finanční riziko může mít na hospodaření subjektu pozitivní i negativní dopad. Existují subjekty, které riziko vyloženě vyhledávají a snaží z něj profitovat. Tyto subjekty bývají označovány jako spekulanti. Dále se na finančním trhu vyskytují subjekty, které se snaží finanční riziko, vůči jemuž jsou vystaveny, nějakým způsobem zajistit. Tyto subjekty bývají označovány jako zajišťovatelé.

Tato diplomová práce je zaměřena právě na způsoby, jimiž je možné finanční riziko odstranit nebo alespoň snížit. Možností jak, se proti finančním rizikům chránit je využití finančních derivátů. Tyto finanční nástroje byly vyvinuty především jako nástroj k omezování a řízení rizika. V posledních letech se obchodování s finančními deriváty rozrůstá zejména díky spekulantům, kteří na sebe, pod vidinou vysokých zisků, přejímají riziko od těch, co se jej naopak chtějí vzdát, tedy zajišťovatelů.

Cílem diplomové práce je ověření a porovnání vybraných portfoliových hedgingových strategií.

K bližšímu pochopení zajištění neboli hedgingu je první část práce, označená jako druhá kapitola, zaměřena na vysvětlení základních pojmů, jako je např. vymezení finančního rizika, typy pozic či popis subjektů trhu. Druhá část této kapitoly je orientována na charakteristiku hedgignových strategií, popis finančních derivátů a vysvětlení Lagrangeova multiplikačního teorému.

Druhá část práce (třetí kapitola), týkající se charakteristiky a stanovení parametrů finančních instrumentů, je rozdělena na část teoretickou a praktickou. V teoretické části jsou nejdříve popsány druhy rozdělení pravděpodobnosti, dále je věnována pozornost stanovení volatility a popisu metody simulace Monte Carlo. V praktické části jsou na modelovém případu investora, propočteny parametry daných finančních instrumentů. Nalezen je také parametr stupeň volnosti, potřebný pro sestavení standardizovaného Studentova t-rozdělení. Dále je proveden test, dle kterého bude určeno vhodné rozdělení pravděpodobnosti výnosů daných aktiv. Empirické rozdělení pravděpodobnosti je zde porovnáno s normovaným normálním rozdělením a standardizovaným Studentovým t-rozdělením. Vybrané rozdělení pravděpodobnosti je pak využito při stanovení cenového vývoje aktiv pomocí simulace Monte Carlo.

Čtvrtá kapitola je pak věnována srovnání dvou hedgingových strategií. Porovnání je uskutečněno z hlediska dynamiky (statický a dynamický hedging) strategie minimalizace rozptylu. Modelové hedgingové portfolio je složeno ze dvou rizikových aktiv a tří forwardů na různé akcie. Optimální množství zajišťovacích instrumentů je nalezeno pomocí optimalizační úlohy *Lagrangeův multiplikační teorém*, který bere v úvahu korelace mezi všemi aktivy portfolia.

Hedgingová portfolia jsou srovnána jednak prostřednictvím rozdělení pravděpodobnosti výsledného efektu zajištění, jednak pomocí řady kritérií jako střední hodnota, směrodatná odchylka, nejlepší a nejhorší výsledek a medián.

2 Metody hedgingových strategií

Nevyhnutelnou součástí veškeré aktivity ekonomických subjektů po celém světě je finanční riziko. Existuje mnoho podob finančního rizika, avšak jejich společným prvkem je nemožnost přesně odhadnout budoucí vývoj cen finančních aktiv. Na základě této skutečnosti vzniká prostor pro spekulaci, arbitráž, ale také pro riziko potenciální ztráty. V současnosti však existuje mnoho možností, kterými lze negativní následky odvrátit nebo částečně eliminovat.

Finanční riziko lze odstranit pomocí diverzifikace nebo zajištění tzv. hedgingu. Diverzifikací se rozumí vytvoření rozsáhlejšího portfolia, hedgingem pak proces odstranění systematických finančních rizik. V této kapitole bude nejprve věnována pozornost některým základním pojmům týkajících se hedgingu, dále pak budou blíže specifikovány hedgingové strategie, jednotlivé finanční deriváty a problematika Lagrangeova multiplikačního teorému.

Teoretický základ kapitoly je v souladu s finanční literaturou Hull (2003), Jílek (2000), Jílek (2002), Tichý (2006), Zmeškal (2004).

2.1 Základní pojmy

K důležitým pojmům, jež je třeba objasnit, a které úzce souvisí s problematikou hedgingu, patří především pojem finančního rizika, dále možné pozice, ve kterých se ekonomický subjekt může nacházet a subjekty vyskytující se na finančním trhu.

2.1.1 Vymezení finančního rizika

Riziko obecně je spojeno s možností vzniku události, jejíž důsledek se s určitou pravděpodobností odchyluje od očekávaného výsledku. Finanční riziko lze vymezit jako možnou finanční ztrátu subjektu. Jedná se o budoucí ztráty vyplývající z daného finančního nebo komoditního nástroje či finančního nebo komoditního portfolia. Ztráta může být očekávaná i neočekávaná.

Mezi nejčastější rizika, se kterými se ekonomické subjekty mohou setkat, patří skupina finančních rizik. S cílem vyhnout se případným ztrátám se oblast finančního řízení, tzv. risk management, stává stále významnější. Jednou ze základních úloh risk managementu je řízení a eliminace finančních rizik způsobených značnou nestabilitou finančních trhů projevující se ve velké volatilitě finančních aktiv a portfolií.

Mezi základní rizika patří rizika tržní, úvěrová, likvidní a operační.

Tržní rizika souvisí s vývojem cen finančních instrumentů, na základě kterých jsou v rámci této skupiny rozlišována rizika akciová, měnová, úroková, komoditní a opční. Akciovým rizikem je chápáno riziko ztráty způsobené změnami cen nástrojů citlivých na ceny akcií či jejich volatilit. Do akciového rizika lze např. zahrnout také riziko změn vztahu mezi různými akciovými indexy či riziko dividend. Komoditním rizikem se rozumí ztráta z cenových nástrojů závislých na změnách cen komodit (např. zlata, ropy, zemního plynu). Měnové riziko je druh rizika odvíjející se od změny kurzu jedné měny vůči druhé. Toto riziko vzniká investorům držícím zahraniční aktiva, ekonomickým subjektům podílejících se na zahraničním obchodu, případně souvisí s dluhovým financováním v cizích měnách. Úrokové riziko vyplývá z pohybu úrokových sazeb.

K běžným finančním rizikům patří *kreditní (úvěrové) riziko*. Příkladem kreditního rizika je nebezpečí nesplnění závazku dlužníka vůči věřiteli. Schopnost dostát svým závazkům dle smluveného splátkového režimu tedy v plné výši a včas, souvisí s ratingem, který charakterizuje stupeň důvěryhodnosti dlužníka. Může se jednat o závazky vznikající z úvěrových, investičních či obchodních aktivit, z platebního styku nebo vypořádání cenných papírů při obchodování na vlastní i cizí účet.

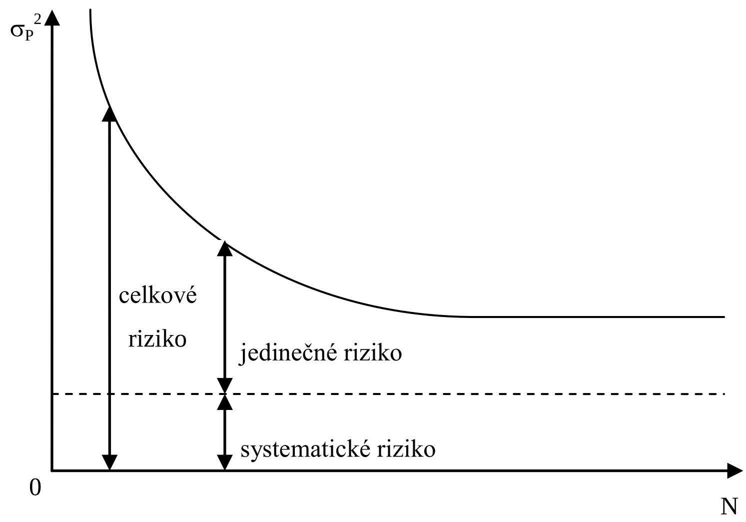
Likvidní riziko souvisí s platební neschopností subjektu splácet své závazky. Likvidní riziko lze rozlišit na riziko financování a riziko tržní likvidity. Riziko financování je rizikem ztráty v důsledku neschopnosti zajistit hotovost na portfolio aktiv a pasiv o určitých splatnostech a úrokových sazbách. V případě, kdy nelze s dostatečnou rychlostí převést likvidní finanční nástroje na hotovost v uspokojivém objemu za rozumnou cenu, jedná se o riziko tržní likvidity.

Operační riziko znamená možnost vzniku ztráty v důsledku provozních chyb a nedostatků. Souvisí jak se záměrnými tak i s neúmyslnými chybami, jejichž původ může být lidského či technického charakteru nebo vzniknout na základě vnějších neovlivnitelných vlivů, např. typu přírodních katastrof.

Rizika lze rozlišovat také z hlediska způsobu jejich eliminace na rizika jedinečná a systematická. Jedinečné riziko souvisí s jednotlivými finančními instrumenty a lze jej odstranit diverzifikací, tedy vytvořením portfolií s větším počtem aktiv. Systematické (tržní nebo také faktorové) riziko, způsobené především změnami v celkovém ekonomickém prostředí, lze eliminovat pouze hedgingem.

Pro snadnější porozumění pojmů systematického rizika, jedinečného rizika a diverzifikace je sestaven Obrázek 2.1. Na ose y je vyobrazeno riziko, zastoupené parametrem rozptyl portfolia, na ose x se nachází počet aktiv obsažených v portfoliu. Z obrázku je zřejmé, že diverzifikací, tedy zvyšujícím se počtem aktiv, se snižuje jedinečné riziko, ale systematické riziko zůstává neměnné.

Obrázek 2.1 Vliv diverzifikace na systematické, jedinečné a celkové riziko portfolia



2.1.2 Typy pozic

Existují dva typy pozic, ve kterých se při obchodování s finančními instrumenty mohou investoři nacházet. Jednou je dlouhá a druhou krátká pozice.

Subjekt se nachází v *dlouhé pozici* (long position) v případě, že vlastní určité finanční aktivum, nebo spotově koupil aktivum a dosud nedošlo k vypořádání anebo koupil aktivum prostřednictvím finančního derivátu s tím, že vypořádání se realizuje v budoucnosti. Hodnota dlouhé pozice roste, jestliže se zvyšuje hodnota daného aktiva. Pokud se jedná o jedinou takovou pozici, pak subjekt spekuluje na růst hodnoty aktiva. Dlouhá pozice se vždy označuje kladným znaménkem.

Subjekt, jež má závazek dodat určité aktivum, nebo spotově prodal aktivum a dosud nedošlo k vypořádání anebo prodal toto aktivum prostřednictvím derivátu s tím, že vypořádání se realizuje v budoucnosti, se nachází *v krátké pozici* (short position). Hodnota krátké pozice klesá, jestliže se zvyšuje hodnota daného aktiva. Jestliže se jedná o jedinou takovou pozici, pak subjekt spekuluje na pokles hodnoty aktiva. Krátká pozice se vždy označuje záporným znaménkem.

V běžné řeči se pojem pozice používá také jako synonymum pro sjednání derivátů, u kterých se užívá termínů „kupující" a „prodávající". Jedná se o nástroje typu futures, opce a forwardy s výjimkou forwardových termínovaných vkladů, kde se užívá pojmů „přijetí" a „poskytnutí". *Potom zaujmutí dlouhé pozice v daném derivátu je ekvivalentní „koupi" derivátu a zaujmutí krátké pozice v daném derivátu je ekvivalentní „prodeji" derivátu.* Jílek (2002, str. 58).

2.1.3 Subjekty finančního trhu

Subjekty finančních trhů lze rozdělit do tří základních skupin podle cíle, se kterým k obchodům přistupují. Těmito účastníky finančních trhů jsou spekulanti, arbitrážisté a zajišťovatelé.

Pro *spekulanty* je podstatný převážně výnos, a proto se zaměřují na nejistý vývoj cen finančních aktiv. Vyhledávají a přebírají na sebe riziko s očekáváním zisku z příznivé změny ceny v budoucnosti. Na základě určité představy o budoucím vývoji trhu či cen aktiv tedy spekulanti prodávají nebo nakupují v závislosti na tom, zda jsou přesvědčeni o nadhodnocení či podhodnocení daného aktiva. Pokud jsou jejich předpovědi správné, vydělají, v opačném případě se dostanou do ztráty.

Arbitrážisté se totožně se spekulanty snaží využít změn cen. Arbitrážisté obvykle nakoupí určité aktivum na jednom trhu a následně stejné aktivum prodají na druhém za účelem profitovat z rozdílu těchto dvou cen. Příležitost arbitráže lze využít nejenom v místě ale i v čase. Tato činnost je nespekulativní, neboť je její výsledek dopředu známý. Abribtrážista tudíž na rozdíl od spekulanta nese nulové riziko. Díky těmto subjektům dochází na finančních trzích k nepřetržitému oceňování finančních instrumentů. V okamžiku, kdy je příležitost k arbitráži rozpoznána dojde k přecenění a možnost arbitráže tak vymizí.

Zajišťovatelé jsou subjekty, které usilují o redukci rizika plynoucího z již otevřených pozic. Nakupují taková aktiva, jejichž výnos je negativně zkorelován s vývojem původního portfolia. V případě, že v průběhu zajištění nedojde k nepříznivé změně ceny, nesou zajišťovatelé určité náklady zajištění. Zajišťovatelé vak nezajišťují proto, aby dosáhli zisku, ale proto, aby měli jistotu, že neprodělají.

2.2 Charakteristika hedgingových strategií

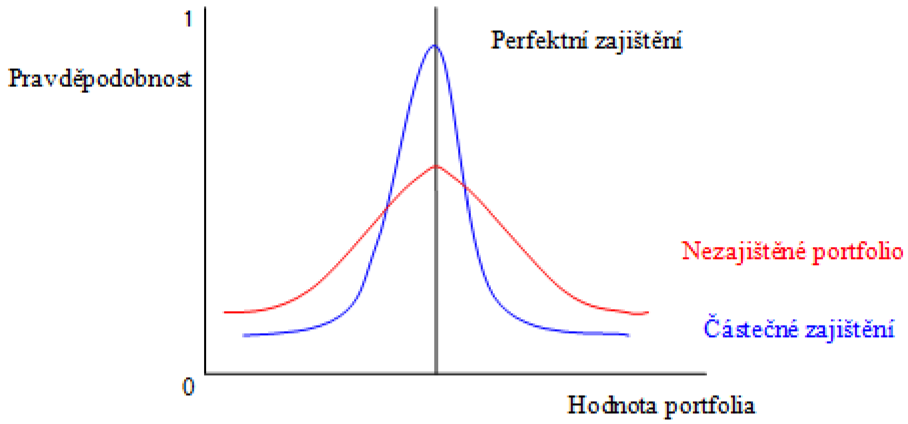
Zajištěním se obecně rozumí ochrana hodnoty určitého aktiva nebo portfolia aktiv proti nepříznivému vývoji akciového trhu, měnového kurzu, úrokových měr, cen komodit či rizikovosti určitého subjektu, viz Jílek (2002).

V odborné terminologii se na místě pojmu *zajišťování* zpravidla objevuje anglický výraz *hedging*. Cílem hedgingu je přenesení rizika z jednoho subjektu na druhý. Subjekt přenášející riziko se označuje jako zajišťovatel (hedger) a subjekt riziko přijímající je spekulant. Zajišťovatel do obchodu vstupuje kvůli obavám z nepříznivého vývoje ceny drženého aktiva nebo růstu jeho volatility, která zvyšuje celkové riziko jeho pozice. Naopak spekulant je pod vidinou zisku ochoten toto riziko přijmout.

Princip hedgingu spočívá v tom, že se k aktivu nebo portfoliu aktiv, jehož riziko je potřeba snížit, přikoupí jiné aktivum, či portfolio aktiv. Nově nakoupenými aktivy zpravidla bývají finanční deriváty. Spojením rizikového aktiva či portfolia se zajišťovacími instrumenty vzniká nové hedgigové portfolio, které je zajištěno proti riziku změn složek portfolia. To znamená, že jeho výnos bude, podle možností, vůči změnám co nejvíce odolný a predikovatelný.

Pro úspěšné zajištění, tedy přenesení celého rizika (nebo alespoň podstatné části rizika), je důležité zvolit vhodný zajišťovací instrument, jehož pohyby jsou zrcadlové k pohybům původního aktiva. Podle stupně eliminace rizika se rozlišuje dokonalé zajištění, částečné zajištění nebo nezajištění, tzn. nezajištěné portfolio. Příčinou částečného zajištění může být např. nesoulad mezi složkami portfolia, kdy rizikové aktivum je zajištěné finančním derivátem, jehož podkladovým aktivem je jiné aktivum – tzv. cross hedging. Efekt těchto tří stupňů zajištění je pomocí příslušných pravděpodobnostních rozdělení zobrazen na Obrázku 2.2.

Obrázek 2.2 Efekt různých stupňů zajištění hodnoty porfolia



Existuje celá řada hledisek, podle kterých lze rozlišovat několik druhů hedgingu. Metody hedgingu je možné rozdělit:

- podle počtu revizí v čase na *statické* (*pasivní*) neboli na jedno období a na *dynamické* (*aktivní*) neboli na více období,
- podle frekvence revizí na *diskrétní* a *spojité*,
- podle typu rizika, které je zajišťováno, na *celkové riziko* (tj. systematické i jedinečné) a *systematické riziko*.
- Podle hedgingových kritérií se rozlišují optimalizační hedgingové strategie na *faktorově neutrální* (např. delta hedging, delta-gama hedging, imunizace na bázi durace apod.), *minimální rozptyl* (minimum variance), *minimalizace střední hodnoty ztrát*, *minimální hodnota Value at Risk*, *maximalizace střední hodnoty funkce užitku* a *minimalizace veličiny RAROC=VaR/capital* (risk adjusted return on capital).
- Podle typu zajišťujícího aktiva se rozeznává hedging na *akcie*, *obligace* (*úrokové sazby*), *měnu*, *futures* (*forwardy*), *opce* a *komodity*.
- Podle toho zda je zajišťování prováděno vůči nějakému vzoru na *benchmark* (*tracking*) *hedging* a *hedging bez vzoru* (*etalonu*), viz Zmeškal (2004, str. 143).

V následujících řádcích budou popsány jednotlivé hedgingové strategie. Teoretický základ je čerpán zejména ze Zmeškal (2004). Po celou dobu se předpokládá, že je zajištění provedeno na jedno období, a že se hedgingové portfolio skládá pouze ze dvou aktiv, z jednoho rizikového aktiva a z jednoho zajišťovacího instrumentu. Hedgingové portfolio, vytvořené z těchto dvou typů aktiv pak vypadá takto,

$$\Pi_t = Q \cdot S_t - h \cdot N \cdot f_t , \tag{2.1}$$

kde Π_t je označením hodnoty portfolia v čase t, Q je množství stejných rizikových aktiv, S_t je jednotková cena rizikového aktiva v čase t, h znamená množství zajišťovacích instrumentů (zajišťovací poměr), N je množství podkladových aktiv na jeden finanční derivát a f_t je jednotková cena finančního derivátu.

Přírůstek hodnoty portfolia by měl být co nejméně rizikový,

$$\Delta\Pi = Q \cdot \Delta S - h \cdot N \cdot \Delta f . \tag{2.2}$$

2.2.1 Faktorově neutrální přístup

Princip tohoto způsobu zajištění je postaven na skutečnosti, že přírůstek ceny jednotlivých aktiv lze vyjádřit aproximativně jako funkce vybraných faktorů pomocí Taylorova rozvoje. Na základě této skutečnosti se vytvoří přírůstek hodnoty hedgingového portfolia aktiv a hledá se takové rozložení hedgingového portfolia, aby přírůstek jeho hodnoty byl nulový, to znamená, nezávislý na změně hodnoty výchozích faktorů v obou směrech.

Obecně je možné vícefaktorový Taylorův rozvoj pro funkci $\Delta f\left(F_1, F_2, \cdots, F_n\right)$ vymezit takto,

$$\begin{aligned} \Delta f\left(F_1, F_2, \cdots, F_n\right) = & \sum_j \frac{\partial f(\cdot)}{\partial F_j} \cdot \Delta F_j + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial F_j \cdot F_k} \cdot \Delta F_j \cdot \Delta F_k + \\ & + \frac{1}{6} \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^3 f(\cdot)}{\partial F_j \cdot \partial F_k \cdot \partial F_l} \cdot \Delta F_j \cdot \Delta F_k \cdot \Delta F_l + \cdots . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ve finančních aplikacích se obvykle používá pouze Taylorův rozvoj 2. stupně, kde $j = k$, a ostatní vlivy jsou ignorovány.

$$\Delta f(F_1, F_2, \cdots, F_n) = \sum_j \frac{\partial f(\cdot)}{\partial F_j} \cdot \Delta F_j + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial F_j^{\,2}} \cdot \Delta F_j^{\,2} \;. \tag{2.4}$$

Pro názornost je následující postup aplikován na portfolio aktiv, jehož součástí jsou opce. Cenu opce lze v souladu s Black-Scholesovým modelem vyjádřit jako,

$$C(\cdot) = f(S, \sigma, dt, r, X), \tag{2.5}$$

kde C je cenou opce, a cena podkladového aktiva S, volatilita σ, doba do splatnosti dt, bezriziková sazba r a realizační cena X jsou faktory působící na tuto cenu. Cena opce bývá vyjadřována vícefaktorovým rozvojem druhého řádu. Kromě podkladového aktiva, které je vyjádřeno také kvadraticky, jsou ostatní faktory vyjádřeny pouze lineárně.

$$\Delta C = \frac{\partial C(\cdot)}{\partial S} \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial S^2} \cdot \Delta S^2 + \frac{\partial C(\cdot)}{\partial \sigma} \cdot \Delta \sigma + \frac{\partial C(\cdot)}{\partial dt} \cdot \Delta dt + \frac{\partial C(\cdot)}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial C(\cdot)}{\partial X} \cdot \Delta X \;. \tag{2.6}$$

Parametry citlivosti lze zapsat také prostřednictvím řeckých písmen,

$$\Delta C = delta \cdot \Delta S + gama \cdot \Delta S^2 + vega \cdot \Delta \sigma + theta \cdot \Delta dt + rho \cdot \Delta r + epsilon \cdot \Delta X \;. \tag{2.7}$$

O *delta neutrální hedging* se jedná tehdy, když jsou ceny aproximovány pouze první derivací, tedy lineárně. V případě, že se kromě první derivace berou v úvahu i druhé, pak se jedná o *delta-gama neutrální hedging*.

Principem faktorově-neutrálního přístupu je nalézt takové hedgingové portfolio, aby byl přírůstek hodnoty portfolia nulový,

$$\Delta \Pi = \sum_i x_i \cdot \Delta C_i(\cdot) = 0, \tag{2.8}$$

kde x_i indikuje množství jednotlivých aktiv a C_i cenu opce.

Po dosazení rovnice (2.7) do rovnice (2.8) lze přírůstek portfolia zapsat takto,

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = &\left(\sum_i delta_i \cdot x_i \right) \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \left(\sum_i gama_i \cdot x_i \right) \cdot \Delta S^2 + \left(\sum_i vega_i \cdot x_i \right) \cdot \Delta \sigma + \\ &+ \left(\sum_i theta_i \cdot x_i \right) \cdot \Delta dt + \left(\sum_i rho_i \cdot x_i \right) \cdot \Delta r + \left(\sum_i epsilon_i \cdot x_i \right) \cdot \Delta X. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Obecnou podmínkou pro zajištění portfolia aktiv je, že parametry hedgingového portfolia *delta, gama, vega, theta, rho* a *epsilon* se musejí rovnat nule.

Delta hedging

Mezi faktorově neutrální přístupy hedgingových strategií patří delta hedging. Touto strategií je možné eliminovat pouze systematické riziko. Hedgingové portfolio se v tomto případě skládá z rizikového aktiva S_t a zajišťovacího instrumentu $f_{t,T}$ (např. forwardu), kde t je čas a T je doba realizace finančního derivátu. Hodnota hedgingového portfolia, kdy rizikové aktivum je v dlouhé pozici a zajišťovací instrument v krátké pozici, je dána následujícím vztahem,

$$\Pi_t = S_t - h \cdot f_{t,T} . \tag{2.10}$$

Následně se hledá takový počet zajišťovacích instrumentů h, aby byl přírůstek hodnoty portfolia, v krátkém časovém intervalu *dt*, rovný nule, tzn. bezrizikový. Matematicky lze tento postup vyjádřit jako,

$$\Delta\Pi = \Delta S - h \cdot \Delta f_{t,T} , \tag{2.11}$$

$$h = ? \quad \rightarrow \quad \Delta\Pi = 0 .$$

Při delta neutrálním hedgingu se využívá pouze aproximace první derivace. Lineární složku Taylorova rozvoje lze v tomto případě zapsat,

$$\Delta f_{t,T} = \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S . \tag{2.12}$$

Podíl $\frac{\partial f}{\partial S}$ je vyjádřením parametru citlivosti změny ceny zajišťovacího instrumentu vzhledem k ceně podkladového aktiva. Tento parametr citlivosti, jak už bylo uvedeno výše, lze označit také jako *delta*. Vztah (2.12) tak lze vyjádřit jako,

$$\Delta f_{t,T} = delta \cdot \Delta S . \tag{2.13}$$

Takto vyjádřenou změnu hodnoty zajišťovacího nástroje je možné dosadit do vztahu (2.11) a v takovémto případě je přírůstek hodnoty portfolia dán následovně,

$$\Delta\Pi = \Delta S - h \cdot delta \cdot \Delta S \,. \tag{2.14}$$

Hledaný počet zajišťovacích instrumentů *h* se pak při splnění podmínky, že přírůstek hodnoty portfolia se rovná nule, rovná,

$$h = \frac{1}{delta} \,. \tag{2.15}$$

V praxi je běžné, že investoři investují do více než jednoho aktiva. Samozřejmostí je zajištění všech těchto aktiv, a proto je nezbytné provést drobnou modifikaci výše uvedených vztahů. Hodnota hedgingového portfolia a hledaný zajišťovací poměr je formulován následovně,

$$\Pi_t = Q \cdot S_t - h \cdot N \cdot f_{t,T} \,, \tag{2.16}$$

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{1}{delta} \,, \tag{2.17}$$

kde *Q* je počet rizikových aktiv a *N* je množství podkladových aktiv, na které je vystavený jeden finanční derivát.

Pro odvození zajišťovacího poměru *h* pro krátkou pozici v rizikovém aktivu a dlouhou pozici v zajišťovacím instrumentu se postupuje stejným způsobem jako v předešlém případě. Liší se pouze vztah pro hedgingové portfolio, a ten má následující tvar,

$$\Pi_t = -Q \cdot S_t + h \cdot N \cdot f_{t,T} \,. \tag{2.18}$$

Zajišťovací poměr *h* má stejnou formu jako v předchozím případě, viz vzorec (2.17).

2.2.2 Minimalizace rozptylu

Smyslem strategie je vytvořit takové hedgingové portfolio, aby riziko změny tohoto portfolia bylo minimální. Optimální složení hedgingového portfolia, přesněji řečeno optimální zajišťovací poměr *h*, se hledá tak, že je nejprve vytvořen rozptyl přírůstku hedgingového portfolia, který je pak minimalizován. Pomocí této strategie lze eliminovat především systematické riziko a částečně také jedinečné riziko.

Za předpokladu hedgingového portfolia složeného dle vztahu (2.16) lze rozptyl přírůstku hedgingového portfolia zapsat jako,

$$\operatorname{var}(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot \operatorname{var}(\Delta S) + h^2 \cdot N^2 \cdot \operatorname{var}(\Delta f) + 2 \cdot (-h) \cdot Q \cdot N \cdot \operatorname{cov}(\Delta S; \Delta f). \tag{2.19}$$

Rozptyl je minimalizován, pomocí provedení jeho první derivace podle *h*. Výsledný výraz je pak položen rovno nule,

$$\frac{\partial \operatorname{var}(\Delta\Pi)}{\partial h} = 2 \cdot h \cdot N^2 \cdot \operatorname{var}(\Delta f) - 2 \cdot Q \cdot N \cdot \operatorname{cov}(\Delta S; \Delta f) = 0. \tag{2.20}$$

Ze vztahu (2.20) vyplývá, že hledaný optimální zajišťovací poměr lze vyjádřit jako,

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{\operatorname{cov}(\Delta S; \Delta f)}{\operatorname{var}(\Delta f)} = \frac{Q}{N} \cdot \frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta f}} \cdot \rho_{\Delta S \Delta f}, \tag{2.21}$$

kde $\rho_{\Delta S \Delta f}$ je korelace výnosů finančních aktiv.

Dosazením nalezeného zajišťovacího poměru do výrazu (2.19) je možno vyjádřit optimální rozptyl portfolia,

$$\operatorname{var}^{*h}(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot \left[\operatorname{var}(\Delta S) - \frac{\operatorname{cov}(\Delta S; \Delta f)}{\operatorname{var}(\Delta f)} \right] = Q^2 \cdot \operatorname{var}(\Delta S) \cdot \left[1 - \rho^2_{\Delta S \Delta f}\right], \tag{2.22}$$

Směrodatnou odchylku lze pak definovat vztahem,

$$\sigma^{*h}_{\Delta\Pi} = Q \cdot \sigma_{\Delta S} \cdot \sqrt{\left(1 - \rho^2_{\Delta S \Delta f}\right)}. \tag{2.23}$$

2.2.3 Minimalizace hodnoty Value at Risk

Metoda Value at Risk (VaR) slouží k zajištění potenciálních velkých ztrát. Pojem Value at Risk znamená hodnotu rizika, která je definována jako nejmenší predikovaná ztráta na zadané hladině pravděpodobnosti za určitou časovou periodu. Základní předpoklad vychází z myšlenky, že pravděpodobnost, že z portfolia aktiv bude zisk $(\Delta\tilde{\Pi})$ menší než předem určená hladina zisku $(ZISK)$, se musí rovnat předem určené hladině pravděpodobnosti (významnosti) α. Kritérium VaR znamená ztrátu a vychází se z toho, že zisk lze vyjádřit jako zápornou ztrátu (*ZISK* = - *VaR*), tedy

$$\Pr\left(\Delta\tilde{\Pi} \leq +ZISK\right) = \alpha \text{ nebo} \tag{2.24}$$

$$\Pr\left(\Delta\tilde{\Pi} \leq -VaR\right) = \alpha \, . \tag{2.25}$$

Předpokládá-li se, že se přírůstky hodnoty faktorů chovají podle normálního rozdělení, pak po substituci $g = \Delta\tilde{\Pi} + VaR$ a normalizaci platí,

$$\Pr\left[\frac{g - E(g)}{\sigma(g)} \leq \frac{0 - E(g)}{\sigma(g)}\right] = \alpha \, . \tag{2.26}$$

Za podmínky, že $z = \dfrac{0 - E(g)}{\sigma(g)}$ a $\Phi(z) = \alpha$, kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, platí

$$z = \Phi^{-1}(\alpha). \tag{2.27}$$

Dále dosazením $g = \Delta\tilde{\Pi} + VaR$ a $z = \dfrac{0 - E(g)}{\sigma(g)}$ do (2.27) je možné určit analytický obecný vztah

$$VaR = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(\Delta\Pi) - E(\Delta\Pi), \tag{2.28}$$

kde $\Phi^{-1}(\alpha)$ je inverzní funkce k distribuční funkci normovaného normálního rozdělení na hladině významnosti α, $\sigma(\Delta\Pi)$ je směrodatná odchylka portfolia a $E(\Delta\Pi)$ střední hodnota portfolia.

Z krátkodobého hlediska bylo empiricky potvrzeno, že střední hodnota výnosů finančních aktiv, tedy i střední hodnota portfolia, je rovna nule. Vzhledem k předpokladu symetrie u normovaného normální rozdělení, tj. $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$, je VaR často formulováno takto,

$$VaR = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \cdot \sigma(\Delta\Pi). \tag{2.29}$$

V případě hedgingového portfolia sestaveného dle rovnice (2.16) lze střední hodnotu portfolia formulovat jako,

$$E(\Delta\Pi) = Q \cdot E(\Delta S) - h \cdot N \cdot E(\Delta f), \tag{2.30}$$

a rozptyl portfolia

$$\mathrm{var}(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot \mathrm{var}(\Delta S) + h^2 \cdot N^2 \cdot \mathrm{var}(\Delta f) - 2 \cdot h \cdot Q \cdot N \cdot \mathrm{cov}(\Delta S; \Delta f). \tag{2.31}$$

Optimální složení portfolia lze formulováno takto,

$$\frac{\partial\, \mathrm{var}(\Delta\Pi)}{\partial h} = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot [\mathrm{var}(\Delta\Pi)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial\, \mathrm{var}(\Delta\Pi)}{\partial h} - \frac{\partial E(\Delta\Pi)}{\partial h} = 0. \tag{2.32}$$

Po dalších úpravách je optimální řešení následující,

$$h_{1,2} = \frac{Q}{N} \cdot \frac{\mathrm{cov}(\Delta S; \Delta f)}{\mathrm{var}(\Delta f)} \pm \frac{Q}{N} \sqrt{\frac{-c \cdot \mathrm{var}(\Delta S) \cdot (1-\rho^2)}{\mathrm{var}(\Delta f) \cdot [c - \mathrm{var}(\Delta f)]}}, \tag{2.33}$$

kde $c = \dfrac{E^2(\Delta f)}{[\Phi^{-1}(\alpha)]^2}$. První položka vztahu (2.33) odpovídá kritériu minimalizace rozptylu a druhá slouží k identifikaci hodnoty Value at Risk.

2.2.4 Minimalizace střední hodnoty ztráty

Cílem této strategie je minimalizovat nebo zjistit střední hodnotu ztráty pod předem stanovenou hodnotu a. Základním předpokladem je, že náhodná veličina x má normální rozdělení,

$$E(x|x \le a) = \frac{1}{\Phi(a)} \int_{-\infty}^{a} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\Phi(a)} \int_{-\infty}^{a} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E(x)}{\sigma(x)}\right)^2} dx, \tag{2.34}$$

po úpravách pro střední hodnotu ztráty platí tento vztah,

$$E(x|x \le a) = \mathrm{var}(x) + \frac{\mathrm{var}(x) \cdot E(x)}{\sqrt{2} \cdot [a - E(x)]}. \tag{2.35}$$

2.2.5 Maximalizace střední hodnoty funkce užitku

Podle Markowitzova modelu mean-variance je známo, že pokud má funkce užitku kvadratický tvar

$$U(x) = x - \frac{1}{2} b \cdot x^2 \tag{2.36}$$

pak je střední hodnota funkce užitku vymezena vztahem,

$$V(x)=E[U(x)]=E\left(x-\frac{1}{2}b\cdot x^2\right)=E(x)-r\cdot \mathrm{var}(x), \tag{2.37}$$

kde r je parametr postoje k riziku.

Střední hodnota funkce užitku přírůstku hodnoty portfolia, složeného totožně jako hedgingové portfolio dle (2.16), je definována vztahem,

$$\begin{aligned} V(\Delta\Pi)&=E(\Delta\Pi)-r\cdot \mathrm{var}(\Delta\Pi)=Q\cdot E(\Delta S)-h\cdot N\cdot E(\Delta f)-r\cdot Q^2\cdot \mathrm{var}(\Delta S)\\ &+r\cdot 2\cdot h\cdot N\cdot Q\cdot \mathrm{cov}(\Delta S;\Delta f)-r\cdot h^2\cdot N^2\cdot \mathrm{var}(\Delta f)\end{aligned}, \tag{2.38}$$

a maximalizována je tak, že je provedena první derivace střední hodnoty funkce užitku podle *h* a výsledný výraz je položen nule,

$$\frac{\partial V(\Delta\Pi)}{\partial h}=-N\cdot E(\Delta f)+r\cdot 2\cdot N\cdot Q\cdot \mathrm{cov}(\Delta S;\Delta f)-r\cdot 2\cdot h\cdot N^2\cdot \mathrm{var}(\Delta f)=0\,. \tag{2.39}$$

Ze vztahu (2.39) vyplývá, že optimální počet kontraktů *h* je definován takto,

$$h=\frac{E(\Delta f)}{2\cdot r\cdot N\cdot \mathrm{var}(\Delta f)}-\frac{Q\cdot \mathrm{cov}(\Delta S;\Delta f)}{N\cdot \mathrm{var}(\Delta f)}. \tag{2.40}$$

Ze vztahu (2.40) je zřejmé, že první složka je vyjádřením očekávaného výnosu investice a druhá složka identická s kritériem minimalizace rozptylu podle (2.21).

Nejvyužívanějšími přístupy při zajišťování finančních rizik jsou v situacích symetrických rozdělení pravděpodobnosti a krátkých období zajišťování strategie delta hedgingu a minimalizace rozptylu. Při výrazných náhodných pohybech podkladových aktiv s nesymetrickým pravděpodobnostním rozdělením nebo pro delší období zajištění je vhodné využít strategie minimalizace Value at Risk a střední hodnoty ztráty. V případě, že je subjekt ochoten podstoupit určitá nezajištěná rizika, pak podle sklonu k riziku vyjádřenému užitkovou funkcí lze uplatnit strategii maximalizace střední hodnoty užitku.

2.2.6 Nezajištěné portfolio

Nezajištěné portfolio je situace, kdy se investor odmítá zajistit proti riziku. Jedná se o stav, kdy investor při uzavření kontraktu neprovede žádné operace nezbytné pro eliminaci rizika a nachází se tudíž v tzv. *nekryté pozici*. Je tedy vlastníkem nezajištěného portfolia, jehož hodnota je do budoucna ovlivňována situací na finančním trhu.

Investor může z daného kontraktu buď profitovat, nebo utrpět ztrátu. Výsledný efekt této strategie podléhá vývoji ceny aktiva v rámci doby trvání investice.

Platí-li, že

$Q \cdot S_T > Q \cdot E[S_T]$ pak investor získá,

$Q \cdot S_T < Q \cdot E[S_T]$ pak investor ztratí,

kde Q je množství finančního aktiva, S_T je cena aktiva v čase T a $E[S_T]$ je investorem očekávaná cena aktiva v čase T.

Očekávaná cena aktiva je dána následujícím vztahem,

$$E[S_T] = S_0 \cdot e^{r \cdot T}. \tag{2.41}$$

2.3 Popis finančních derivátů

Finanční aktiva obecně představují právní nárok na výplatu finančních prostředků k určitému časovému okamžiku. Ve finanční literatuře se lze v souvislosti s pojmem finanční aktivum setkat také s výrazy finanční nástroj či instrument, finanční produkt, případně cenný papír.

Na finančním trhu se vyskytují dva typy finančních nástrojů, a to primární a sekundární nástroje. Mezi *primární nástroje* lze zařadit dluhové cenné papíry, majetkové cenné papíry, měny a komodity. K *sekundárním nástrojům* patří finanční deriváty, jejichž výplata je odvozena od hodnoty nějakého podkladového aktiva.

Finanční aktiva lze dále rozlišovat podle formy vypořádání. V případě, že dojde k vypořádání kontraktu s finančním aktivem ve stejném čase, jako v čase ve kterém je kontrakt dohodnut, jde *o spotový obchod*. Pokud čas dohody kontraktu není shodný s časem jeho vypořádání, pak se jedná o *termínový obchod*. Jinak řečeno, u termínových kontraktů dochází v čase t k dohodě o směně podkladového aktiva S za předem dohodnutou částku X, označovanou jako realizační cena. Dohodnutá směna se uskuteční za předem stanovených podmínek v čase $T = t + dt$, kde dt je doba do zralosti.

Termínové kontrakty lze dle druhu rozdělit na pevné a opční kontrakty. Příkladem *pevných termínových kontraktů* jsou forwardy, futures a swapy. Specifikem těchto kontraktů je povinnost obou zúčastněných subjektů dodržet předem stanovených závazků. Subjekt nacházející se v dlouhé pozici má povinnost koupit podkladové aktivum a subjekt v krátké pozici je naopak povinen podkladové aktivum prodat. Jak je z názvu zřejmé, mezi *opční termínové kontrakty* jsou řazeny opce. Opční termínové obchody jsou charakteristické tím, že subjekt v dlouhé pozici si může vybrat, zda je pro něj výhodné opci uplatnit či nikoliv. V případě, že se kupující rozhodne své opční právo uplatnit, pak subjekt v krátké pozici je povinen jeho požadavku vyhovět. Jinými slovy dané podkladové aktivum prodat.

S finančními deriváty se obchoduje jak na klasických burzách, tak na mimoburzovním trhu. Výhodou obchodování na burze je likvidita, standardizace kontraktů, které jsou protistrany povinny dodržet a absence kreditního rizika. Vypořádání je totiž zprostředkováno prostřednictvím clearingového centra, protistrany se tak vůbec nemusí setkat. Nezkrachování tohoto systému je zajištěno pomocí marží (záloh) a vypořádáním změn na denní bázi. Nevýhodou může být pro některé subjekty právě standardizace kontraktů, která znemožňuje uzavření kontraktu dle jeho individuální potřeby.

Zprostředkování obchodů na mimoburzovním trhu (over the counter market neboli OTC) je uskutečňováno pomocí makléřů nebo dealerů, kteří spolu komunikují prostřednictvím počítačových sítí či telefonů. Výhoda OTC trhů spočívá ve specifičnosti každého kontaktu, který je dán tím, že OTC trhy nejsou standardizované, tudíž všechny parametry kontraktu jako realizační cena, množství či kvalita podkladového aktiva závisí na dohodě obchodujících stran. Kromě toho jsou OTC trhy levné, neboť nejsou spojeny s poplatky určenými derivátovým burzám či clearingoým centrům. Nevýhodou OTC trhů je větší rizikovost obchodů, protože subjekty nemají žádné záruky o solidnosti svého partnera.

V současnosti jsou finanční deriváty velmi univerzálním nástrojem a jejich podkladovým aktivem může být prakticky cokoliv. Deriváty tak mohou být závislé, kromě běžných podkladových aktiv jako jsou akcie, dluhopisy, úrokové sazby, měny, komodity či indexy, také na počasí, např. na teplotě.

2.3.1 Forward

Forwardy patří do skupiny lineárních finančních derivátů, tedy aktiv, jejichž hodnota je odvoditelná od hodnoty podkladového aktiva a zároveň platí oboustranně symetrický vztah mezi stranami kontraktu. Smyslem oboustranně symetrického vztahu je, že v daném okamžiku T (doba zralosti) je držitel kontraktu zavázán koupit podkladové aktivum S_T za předem stanovenou realizační cenu X a výstavce kontraktu je naopak povinen podkladové aktivum za stejných podmínek prodat. Po uzavření kontraktu tedy nemá ani jeden z partnerů v době vypořádání možnost volby a musí svým závazkům dostát.

Podmínky jsou dohodnuty v okamžiku sjednání kontraktu, jednoznačně je v nich uveden způsob dodání podkladového aktiva, dále co je předmětem směny (zboží, hotovost, cenný papír, komodita, měna aj.), kvalita a množství podkladového aktiva, realizační cena a doba zralosti kontraktu.

Forwardové kontrakty nejsou obchodovány na burzách, ale na OTC (over-the-counter) trzích. Kontrakty jsou nejčastěji uzavírány mezi bankami a výrobními organizacemi nebo mezi dvěma bankami. Nejsou tudíž standardizovány a jejich parametry tak mohou být nastaveny tak, aby vyhovovaly oběma smluvním stranám. I přes výhody však uzavření kontraktu s sebou přináší určité riziko v podobě selhání protistrany, spočívající v neochotě nebo neschopnosti splnit své závazky. Částečně lze při uzavření kontraktu tomuto riziku zabránit složením určitého depozita, které plní funkci záruky za dodržení kontraktu. Dalším možným problémem je malá likvidita nástroje. Jednak jej nelze zrušit bez vzájemné dohody obou smluvních stran a jednak je na OTC trhnu obtížné najít partnera, který by byl ochotný koupit forward s danými parametry.

Hodnota forwardového kontraktu se v době zralosti označuje jako výplatní funkce, resp. vnitřní hodnota. Výplatní funkce držitele kontraktu, jež se nachází v dlouhé pozici ψ_T^{long}, je dána vztahem

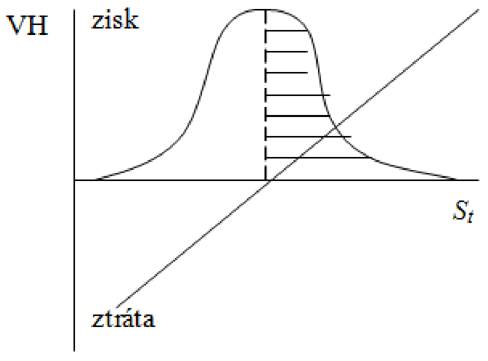
$$\psi_T^{long} = S_T - X \,. \tag{2.42}$$

Forward přináší svému držiteli zisk v případě, že $S_T > X$ a ztrátu pokud $S_T < X$. Opačná situace platí pro výstavce, který se nachází v krátké pozici. Výplatní funkce subjektu v krátké pozici ψ_T^{short} je dána následovně

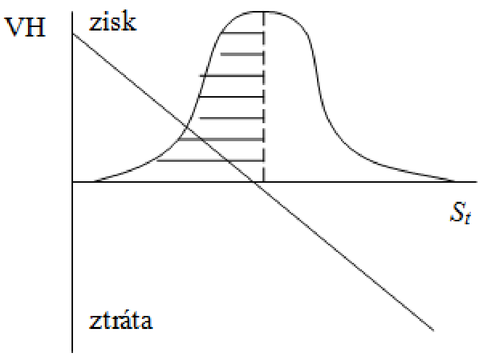
$$\psi_T^{short} = X - S_T. \tag{2.43}$$

Výplatní funkce držitele kontraktu je znázorněna na Obrázku 2.3 a výplatní funkce výstavce na Obrázku 2.4. Šrafovaná oblast znázorňuje pravděpodobnost, že bude v dané pozici dosaženo zisku.

Obrázek 2.3 Výplatní funkce forwardového kontraktu - dlouhá pozice



Obrázek 2.4 Výplatní funkce forwardového kontraktu - krátká pozice



Ocenění forwardového kontraktu

Hodnota forwardu v čase *t* je dána současnou hodnotou očekávané výplaty v době zralosti. Obecný zápis hodnoty forwardu v dlouhé pozici je dán vztahem

$$F_{t,T} = e^{dfT} E_t[S_T - X], \tag{2.44}$$

kde $F_{t,T}$ je hodnota forwardu a df je diskontní faktor.

Forwardová cena (*f*) je pak dána očekávanou hodnotou podkladového aktiva v době zralosti, tj.

$$f_{t,T} = E_t[S_T]. \tag{2.45}$$

Obvykle jsou podmínky při vzniku forwardu nastaveny tak, aby jeho výchozí hodnota byla nulová. To znamená, že hodnota forwardu je nulová tehdy, když se realizační cena rovná očekávané hodnotě podkladového aktiva. Matematicky je tento vztah vyjádřen takto,

$$F_{t,T} = 0 \Leftrightarrow E_t[S_t] = X. \tag{2.46}$$

Ze vztahu (2.46) vyplývá, že forwardová cena je taková úroveň realizační ceny, při které je hodnota forwardového kontraktu nulová. Pokud pravá část této rovnice není platná, pak obvykle dochází k aplikaci principu nemožnosti arbitráže. Princip nemožnosti arbitráže spočívá v hledání bezrizikového portfolia, kdy je možno určit jaká bude jeho hodnota v době zralosti. Hledané portfolio lze matematickým zápisem vyjádřit jako,

$$\Pi = S - F \,. \tag{2.47}$$

V době zralosti je pak portfolio sestaveno následovně,

$$\Pi_T = S_T - \psi_T = S_T - (S_T - X) = X \tag{2.48}$$

Protože s určitostí známe hodnotu portfolia v okamžiku zralosti forwardu, tj. $\Pi_T = X$, můžeme konstatovat, že sestavené portfolio je skutečně bezrizikové pro jakoukoliv hodnotu podkladového aktiva.

Současnou hodnotu portfolia lze získat diskontováním bezrizikovou sazbou *r*.

$$t = T - dt: \;\; \Pi_t = \Pi_T \cdot e^{-r \cdot dt} = X \cdot e^{-r \cdot dt} = S_t - F_{t,T} \,, \tag{2.49}$$

což implikuje, že

$$F_{t,T} = S_t - X \cdot e^{-r \cdot dt} . \tag{2.50}$$

2.3.2 Futures

Stejně jako forwardové kontrakty, tak i futures představují smluvené vztahy mezi dvěma stranami o koupi nebo prodeji podkladového aktiva ve stanoveném čase a za dohodnutou cenu. Od forwardů se tyto zajišťovací instrumenty liší především tím, že se s nimi neobchoduje na OTC trzích, ale prostřednictvím organizovaných trhů, tj. na burzách.

Aby se s kontrakty na burzách mohlo obchodovat, musí být při jejich konstrukci dodržovány burzou stanovené podmínky, kterými jsou například velikost kontraktu, místo nebo čas vypořádání. Skutečnost, že kontrakty futures podléhají burzou stanoveným podmínkám, se obvykle označuje pojmem standardizace. Kontrakty futures jsou standardizovanou formou forwardu. Ke standardizaci se přistupuje z důvodu dostupnosti a zvýšení atraktivnosti pro širší skupinu tržních subjektů. U těchto kontraktů je standardizováno zejména množství obchodovatelných podkladových aktiv. S futures se obchoduje v objemech, jimž se obecně říká LOT. LOT je vymezen jako jednotka minimálního obchodovaného množství a obchodovat je možné pouze s násobky těchto LOTŮ. Standardizovány jsou i okamžiky obchodování. Ročně lze obchodovat pouze čtyři kontrakty se splatností v březnu, červnu, září a prosinci. Cílem standardizace je zajistit větší likviditu trhu, prostřednictvím větší koncentrace poptávky a nabídky. Nevýhodou standardizovaných obchodů je, že nemusí vyhovovat požadavkům subjektu.

Díky tomu, že se vypořádání kontraktů futures děje prostřednictvím clearingových center, nejsou tyto kontrakty spojeny s úvěrovým rizikem. Clearingové centrum zajišťuje, že podmínky kontraktu budou splněny. Pokud tedy jedna ze smluvních stran neuhradí své závazky, pak důsledky nenese druhá strana, ale clearingové centrum. Z tohoto důvodu skládají brokeři po uzavření obchodu clearingovému centru na svůj zálohový účet zálohu, tzv. margin. Stanovovány jsou tři typy záloh, a těmi jsou počáteční záloha, udržovací záloha a doplňovací záloha. Minimální úroveň počáteční zálohy je stanovena burzou. Výše záloh je podmíněna variabilitě podkladového aktiva. Platí, že čím je vyšší variabilita aktiva, tím vyšší musí být hodnota záloh.

Další vlastností futures je, že oproti forwardům dochází k častějšímu hotovostnímu vypořádání, nebo k ukončení existence kontraktu před dobou zralosti. Významným rozdílem oproti forwardům také je tzv. *marking to market*, kdy na burze dochází v čase t ke kótování budoucí ceny $F_{t,T}$,

$$F_{t,T} = E_t\left[S_T\right]. \tag{2.51}$$

Aktuální hodnota kontraktu je dle uzavírací ceny zjištěna každý obchodní den,

$$F_{t,T} = e^{-r \cdot dt}\left(F_{t,T} - F_{t-1,T}\right). \tag{2.52}$$

K vypořádání kontraktu je využito zálohového čtu klienta, v případě kladné hodnoty připsáním na účet, v případě záporné hodnoty strhnutím. Do následujícího dne pak kontrakt vstupuje s nulovou počáteční hodnotou. Denně tak dochází ke změně efektivní realizační ceny kontraktu, která odpovídá poslední uzavírací ceně. Také tímto každodenním vypořádáním je sníženo riziko, že jedna ze stran nedostojí svému závazku.

Podobně jako forwardy jsou futures rozlišovány dle podkladového aktiva např. na akciová futures, komoditní futures či úrokové a měnové futures.

V Tabulce 2.1 jsou stručně vypsány hlavní rozdíly mezi kontrakty typu forward a futures.

Tabulka 2.1 Hlavní rozdíly mezi kontrakty typu forward a futures

Forward	**Futures**
Kontrakt obchodovaný na OTC trzích	Kontrakt obchodovaný na burzách
Nestandardizovaný	Standardizovaný
Vyrovnání na konci kontraktu	Denní vyrovnání
Hrozba kreditního rizika	Prakticky žádné kreditní riziko

2.3.3 Swap

Swapem je obecně myšlena písemná dohoda dvou stran o opakované vzájemné výměně peněžních toků v budoucnosti. Z tohoto pohledu lze swapový kontrakt mimo jiné chápat jako opakující se forward. Ve vlastnostech kontraktu je přesně definován čas, ve kterém budou peněžní toky vypořádány a způsob jejich kalkulace.

Obvykle bývá platba jedné ze smluvních stran fixní a druhé plovoucí. Pozice subjektu, jež má povinnost platit fixní sazbu, je označována za krátkou, naopak pozice subjektu, který je povinen platit variabilní sazbu, je označována za dlouhou. Pro zjednodušení kontraktů se neprovádí výměna plateb, ale dochází pouze k zápočtům, kdy platbu provede ta strana, jejíž závazek je vyšší.

Základní dělení swapů je stejné jako u forwardů a futures a je tak závislé na typu podkladového aktiva. Rozlišují se úrokové či úvěrové swapy, dále akciové, měnové a komoditní swapy.

Stejně jako forwardové kontrakty jsou i swapy sestaveny tak, aby jejich počáteční hodnota byla nulová. Realizační cena swapu, tzv. *swapová sazba*, je pak stanovena jako vážený průměr forwardových sazeb.

2.3.4 Opce

Opční kontrakt má všechny znaky termínových operací, avšak odlišuje se postavením smluvních partnerů, které není rovnoměrné. Opční kontrakt je smlouva mezi vypisovatelem opce, který je povinen dodržet podmínky kontraktu a držitelem opce, který má právo se rozhodnout, zda podmínky kontraktu dodrží, či od smlouvy odstoupí. Držitel opce má právo nechat opci propadnout, pokud je to pro něj výhodné. Opce tedy patří do skupiny nelineárních typů finančních derivátů.

V podmínkách kontraktu je nutné specifikovat podkladové aktivum, na které se opce vztahuje, dále cenu podkladového aktiva, která je běžně označována jako realizační cena (excercise price, strike price), datum plnění opce, které je označováno jako datum splatnosti nebo doba dospělosti opce (empiry date, maturity date) a cenu tohoto finančního derivátu.

Podkladovým aktivem opce může být např. akcie, burzovní index, obligace, úroková sazba, měnový kurz, komodita či finanční derivát (např. opce na opci). Realizační cena je cena podkladového aktiva, na které se smluvní strany dohodnou, v době realizace pak za ni dojde ke koupi nebo prodeji. Dobou splatnosti je vyjádřen konec období, na které je opční kontrakt uzavřen. Cena opce, nebo opční prémie, je cena za opční práva, kterou platí kupující derivátu při uzavření kontraktu.

Opce lze členit dle několika hledisek. Základní členění je odvozeno z rozlišení kupní a prodejní opce, okamžiku uplatnění opce a složitosti výplatní funkce.

Vypisovatel opce může vypsat kupní opci, tzv. *call option*, nebo prodejní opci, tzv. *put option*. V případě kupní opce má držitel právo koupit určité množství podkladového aktiva za předem stanovenou realizační cenu. Jedná-li se o prodejní opci pak má držitel opce právo prodat určité množství podkladového aktiva za předem dohodnutou realizační cenu.

Podle uplatnění se rozlišují opce *evropské*, kdy lze opci využít pouze v momentu realizace, dále jsou to opce *americké*, které lze využít po celou dobu zralosti, opce *bermudské*, které je možno využít v nějakém intervalu mezi uzavřením kontraktu a realizací a *swing* opce, kdy je pro využití opce stanoveno několik intervalů.

Podle složitosti výplatní funkce se rozlišuje jednoduchá opce, tzv. *plain vanilla* opce a *exotické* opce se složitějšími výplatními funkcemi.

Oceňování opcí

Pro svou jednoduchost je nejvyužívanějším modelem pro oceňování opcí Black-Scholesův model. K nutným předpokladům základního spojitého Black-Sholesova modelu, tj. bez dividend s podkladovým aktivem akcie, patří následující. Tichý (2006), Zmeškal (2004).

- Možnost krátkého prodeje s úplným využitím výtěžku,
- oceňují se evropské opce,
- konstantní bezriziková sazba *r* pro všechny doby splatnosti,
- konstantní volatilita podkladového aktiva σ,
- neexistence dividendového příjmu po celou dobu životnosti finančního derivátu,
- spojité obchodování s nekonečně dělitelnými aktivy,
- existence ideálního trhu se zanedbatelnými transakčními náklady a daněmi, na kterém jsou všehna aktiva oceněnta tak, aby nebyla možná arbitráž,
- ceny podkladových aktiv se vyvíjejí dle geometrického Brownova pohybu s logaritmickými cenami,
- ceny se vyvíjí pomocí tzv. Markovova procesu, kdy budoucí cena závisí na ceně aktuální a ne na minulých cenách.

Za daných předpokladů se cena evropské call opce určí následovně,

$$c = S_0 \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot dt} \cdot N(d_2), \tag{2.53}$$

přičemž $$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt}{\sigma \cdot \sqrt{dt}} \quad \text{a} \tag{2.54}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{dt}, \tag{2.55}$$

kde *c* je cena evropské call opce, S_0 je cena podkladového aktiva v okamžiku ocenění opce, $N(d_1)$, $N(d_2)$ udávají hodnotu funkce kumulativního normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti, X je realizační cena, r je hodnota roční bezrizikové sazby, dt je doba do splatnosti opce a σ je směrodatná odchylka výnosu podkladového aktiva.

Výpočet evropské put opce lze odvodit z následujícího vztahu, který je běžně označován jako put-call parita.

$$c + X \cdot e^{-r \cdot dt} = p + S_0, \tag{2.56}$$

Put-call parita vyjadřuje vztah mezi put a call opcemi. Vztah (2.56) je vyjádřením skutečnosti, že hodnota evropské call opce s určitou realizační cenou, dobou realizace a s určitým podkladovým aktivem, může být odvozená z hodnoty evropské put opce se stejnými parametry a naopak. Hodnota put opce se pak formuluje takto,

$$p = X \cdot e^{-r \cdot dt} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(d_1). \tag{2.57}$$

Parametry ovlivňující hodnotu opce

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že cena opce je ovlivněna pěti základními parametry. Matematicky je možné cenu opce vyjádřit jako funkci parametrů,

$$c = f(S_t, X, dt, \sigma, r). \tag{2.58}$$

Z rovnic (2.53) a (2.57) je zřejmé, že pokud roste cena podkladového aktiva, roste také cena kupní opce, zatímco cena prodejní opce klesá. Opačný vliv na cenu opce má realizační cena. S jejím růstem klesá cena kupní opce a roste cena opce prodejní.

Cena kupní opce se zvyšuje také s delší dobou splatnosti. Čím je doba realizace delší, tím existuje větší pravděpodobnost výkyvů ve vývoji ceny podkladového aktiva. Vypisovatel opce tak podstupuje riziko větších ztrát, které jsou kompenzované právě vyšší cenou opce.

Dalším parametrem ovlivňujícím cenu opce je volatilita. S rostoucí volatilitou držitel opce dosahuje vyšších zisků, avšak vypisovatel dosahuje vyšších ztrát. Proto platí, že čím vyšší volatilita ceny podkladového aktiva, tím vyšší cena call opce.

Změna bezrizikové sazby způsobuje změnu současné hodnoty budoucích očekávaných toků z opce a ovlivňuje dlouhodobou míru růstu ceny podkladového aktiva. Za předpokladu jinak neměnných okolností bude mít růst bezrizikové sazby negativní dopad na cenu put opce a pozitivní dopad na cenu call opce. Opce s kratší dobou životnosti nejsou ke změnám bezrizikové sazby příliš citlivé.

Vnitřní hodnota opce

Důležitým parametrem opcí je vnitřní hodnota (*VH*). Vnitřní hodnota je definována jako přínos z okamžitého uplatnění opce. Jde o efekt, který kupující dostane v momentě uplatnění derivátu bez ohledu na cenu (*opční prémie*), kterou vynaložil na počátku kontraktu.

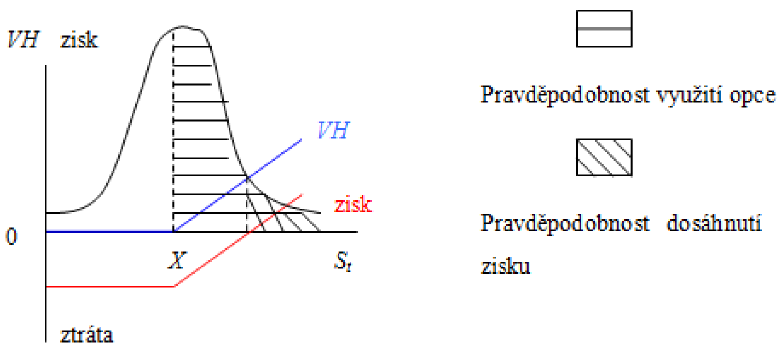
Nastat můžou tři situace označované jako ATM, ITM a OTM.

- At the money (ATM) – cena podkladového aktiva se rovná realizační ceně (*VH* = 0),
- In the money (ITM) – cena podkladového aktiva je větší než realizační cena (*VH* > 0),
- Out of the money (OTM) – cena podkladového aktiva je menší než realizační cena (*VH* < 0).

Na základě toho, že o využití opce rozhoduje její držitel, lze konstatovat, že své právo realizuje v případě, kdy se opce nachází v pozici in the money.

Vnitřní hodnota evropské call opce z pohledu kupujícího je znázorněna na Obrázku 2.5.

Obrázek 2.5 Vnitřní hodnota a zisk call opce, dlouhá pozice (kupující)



Z Obrázku 2.5 je zřejmé, že vnitřní hodnota pro call opci v dlouhé pozici se rovná 0 pro případ $S_T < X$, kdy opce není využita, anebo se rovná $S_T - X$ pro $S_T > X$. Matematický zápis vnitřní hodnoty call opce v dlouhé pozici je následující,

$$VH_T = \max(S_T - X; 0). \tag{2.59}$$

Z Obrázku je také patrné, že držitel opce se vystavuje riziku ztráty pouze do výše opční prémie, přičemž jeho zisk je neomezený. Celkový efekt kupujícího call opce po započítání opční prémie je vyjádřen takto

$$zisk_T = \max(S_T - X - c; -c). \tag{2.60}$$

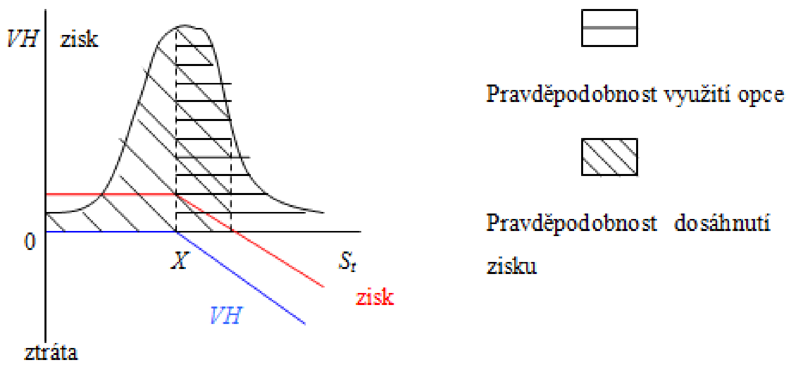
Na druhé straně opčního kontraktu je vypisovatel evropské call opce, tedy prodávající. Zisk prodávajícího je ohraničen výší obdržené prémie, přičemž jeho ztráta je neomezená. Zisk je možno matematicky vyjádřit jako,

$$zisk_T = \min(X - S_T + c; +c). \tag{2.61}$$

Na Obrázku 2.6 je znázorněna vnitřní hodnota a zisk vypisovatele call opce. Vnitřní hodnota a zisk, který vypisovatel dosáhne, závisí na rozhodnutí držitele opce. Jestliže $S_T < X$, pak se vnitřní hodnota rovná 0, opce nebude využita a vypisovatel dosáhne zisku ve výši opční prémie. Jestliže platí $S_T > X$ pak vnitřní hodnota dosahuje rozdílu $S_T - X$. Matematicky lze vnitřní hodnotu call opce v krátké pozici vyjádřit takto,

$$VH_T = \min(X - S_T; 0). \tag{2.62}$$

Obrázek 2.6 Vnitřní hodnota a zisk call opce, krátká pozice (prodávající)



Další základní opční pozicí je pozice kupujícího put opce, tato pozice opravňuje držitele aktiva prodat podkladové aktivum za realizační cenu *X*.

Výplatní funkce put opce v dlouhé pozici je dána vztahem,

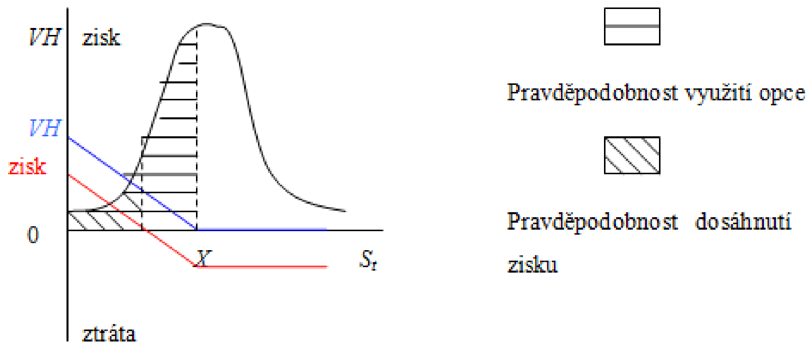
$$VH_T = \max(X - S_T; 0) \text{ a} \tag{2.63}$$

zisk z této opce je definován takto,

$$zisk_T = \max(X - S_T - c; -c). \tag{2.64}$$

Vnitřní hodnota a zisk prodejní opce v dlouhé pozici je zobrazena na Obrázku 2.7.

Obrázek 2.7 Vnitřní hodnota a zisk put opce, dlouhá pozice (kupující)



Z Obrázku 2.7 vyplývá, že je opce využita v případě že $S_T < X$, vnitřní hodnota se pak rovná $X - S_T$. Pokud platí $S_T > X$, pak opce není využita, vnitřní hodnota se rovná 0 a držitel kontraktu utrpí ztrátu pouze v hodnotě opční prémie.

V opačné pozici se nachází prodávající put opce, který má povinnost v případě zájmu držitele kontraktu koupit dané podkladové aktivum za předem dohodnutou realizační cenu.

Výplatní funkce put opce v krátké pozici je dána jako,

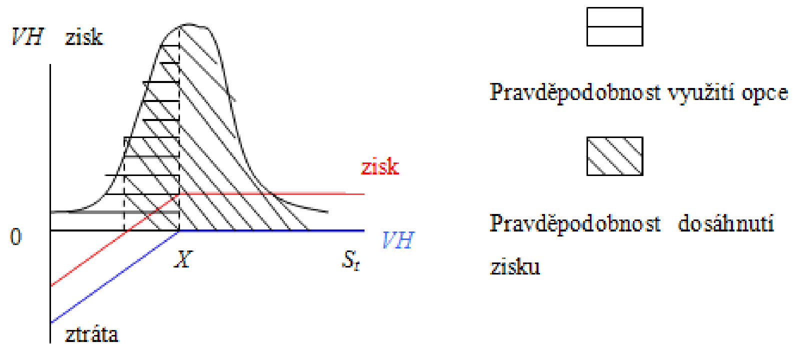
$$VH_T = \min(S_T - X; 0) \text{ a} \tag{2.65}$$

zisk je dán vztahem

$$zisk_T = \min(S_T - X + c; +c). \tag{2.66}$$

Vnitřní hodnota a zisk prodejní opce v krátké pozici je zobrazena na Obrázku 2.8.

Obrázek 2.8 Vnitřní hodnota a zisk prodejní opce, krátká pozice (prodávající)



Z Obrázku je zřejmé, že opce je využita pokud $S_T < X$, vnitřní hodnota výstavce kontraktu je tak záporná. Platí-li $S_T > X$ pak opce není využita a vnitřní hodnota se rovná 0.

Výše uvedené typy opcí, tedy call opce v krátké i dlouhé pozici a put opce v krátké i dlouhé pozici se řadí mezi jednoduché opce, tzv. *plain vanilla* opce.

Exotické opce jsou deriváty se složitější výplatní funkcí. S exotickými opcemi se většinou obchoduje na OTC trzích. Důvodem obchodování těchto kontraktů na OTC trzích je, že jsou tvořeny zejména k uspokojení konkrétních potřeb ekonomických subjektů a je zde také umožněno zohlednění budoucího vývoje podkladových aktiv. Z druhé strany je komplikovanější ocenění těchto opcí a také likvidita kontraktu je mnohem nižší než u jednoduchých opcí.

Mezi exotické opce patří např:

- *Package*, neboli portfolio, které je složené z evropských call a put opcí, forwardového kontraku, podkladového aktiva a hotovosti.
- *Výběrové opce* jsou opce, kde se jejich držitel může po uplynutí určité časové periody rozhodnout, zda půjde o call či put opce.
- *Binární opce*, jejichž výplata je buď vše anebo nic.
- *Bariérové opce*, jejichž výplata závisí na čase a aktuální spotové hodnotě podkladového aktiva. Předchozí vývoj ceny podkladového aktiva ale ovlivňuje skutečnost, zda bude opce v době zralosti aktivní či neaktivní.

- *Lookback opce* jsou opce, které opravňují koupit či prodat podkladové aktivum za nejvíce příhodnou cenu dosaženou v průběhu životnosti kontraktu.

- *Asijské opce*, kdy výplata závisí na průměrné ceně podkladového aktiva za určité období v průběhu životnosti kontraktu.

- *Složené opce*, kterými jsou např. opce na opce.

2.4 Lagrangeův multiplikační teorém

Praktická část diplomové práce je zaměřena na hledání množství různých zajišťovacích instrumentů v hedgingovém portfoliu. Revize hedgingového portfolia bude provedena v několika časových intervalech, kdy v každém okamžiku revize bude potřeba nalézt optimální složení hedgingového portfolia. K tomuto postupu je nutné využít optimalizační úlohy *Lagrangeův multiplikační teorém*. Teoretický základ podkapitoly vychází z Luenberger (1995).

Základem optimalizační úlohy je nalezení maximalizace nebo minimalizace funkce nějaké množiny. Hlavní výsledek závisí na *Weierstrassově existenčním teorému*, kde *S* je uzavřená množina v množině R^m, a *f* je spojitá funkce této množiny *S*. Z těchto předpokladů vyplývá, že *f* má maximum (x^*) na *S*, a platí $x^* \in S$ a zároveň $f(x^*) \geq f(x)$ pro všechna $x \in S$.

Bod x^* je relativním maximem funkce *f* na *S* jestliže existuje nějaké $\varepsilon > 0$ a zároveň $x \in S$, $\|x - x^*\| < \varepsilon$, z čehož plyne že $f(x) \leq f(x^*)$. Skutečné celkové maximum se nazývá globální maximum. Odlišně nastavené podmínky mohou obvykle charakterizovat relativní maxima nebo minima.

Úloha 1

Optimalizační úloha s omezením typu rovnosti má formu

účelová funkce → max $f(x)$,

podmínky $h_1(x) = 0,\ h_2(x) = 0,\ \cdots,\ h_l(x) = 0$,

kde $x \in R^m$ a funkce *f* a h_1, h_2, ..., h_l jsou reálná čísla.

Pokud $l \leq m$, pak je možná existence více relativních maxim.

Jestliže bod x^* splňuje podmínky $h_1(x^*) = 0,\ h_2(x^*) = 0,\ \cdots,\ h_l(x) = 0$, pak se nazývá normálním bodem, jestliže existují vektory $\nabla h_1(x^*), \nabla h_2(x^*), \cdots, \nabla h_l(x^*)$, které jsou lineárně závislé.

Nejdůležitějším výstupem omezené optimalizační úlohy je *Lagrangeův multiplikační teorém*, obsahující nezbytně nutné podmínky pro řešení dané úlohy. Předpokladem pro Lagrangeův multiplikační teorém je, že f a h_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ mají spojitou parciální derivaci. Nechť x^* je relativní maximální bod z Úlohy 1 za předpokladu, že x^* je běžný bod omezující podmínky. Pak existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ taková, že

$$\nabla f(x^*) - \lambda_1 \nabla h_1(x^*) - \lambda_2 \nabla h_2(x^*) - \cdots - \lambda_l \nabla h_l(x^*) = 0. \tag{2.67}$$

Z tohoto teorému vyplývá podmínka první derivace, protože jsou aplikovány pouze první derivace. Tato nutná podmínka je obvykle používána při prvním sestavení Lagrangeovy funkce

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) = f(x) - \lambda_1 h_1(x) - \lambda_2 h_2(x) - \cdots - \lambda_l h_l(x). \tag{2.68}$$

Z výše uvedeného je jasné, že se Lagrangeova funkce skládá z účelové funkce $f(x)$ a podmínek upravených tak, aby se rovnaly nule, tedy

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1 \lambda_2 \cdots, \lambda_l)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}. \tag{2.69}$$

Optimalizační úloha, buď maximalizace, nebo minimalizace, má lineární účelovou funkci a soubor lineárních omezení nerovnosti. Standardní formu lze formulovat takto,

minimalizace $c \cdot x$,

s podmínkami $A \cdot x = b,\quad x \geq 0$, (2.70)

kde x je n-rozměrný neznámý vektor, vektory c a b a matice A jsou předem stanoveny. Vektor c je n-rozměrný, vektor b m-rozměrný, s $m \leq n$. Matice A je pak $m \times n$.

3 Charakteristika a stanovení parametrů finančních instrumentů

Velmi důležitým prvkem v oblasti oceňování a zajišťování finančních instrumentů je sledování vývoje jejich cen v čase. Z tohoto důvodu je tématu simulace cenového vývoje věnována celá kapitola. Ve třetí kapitole jsou popsány vybrané druhy rozdělení pravděpodobnosti, modely stanovení volatility a simulace Monte Carlo. Dále jsou podrobněji specifikovány parametry jednotlivých aktiv, následuje nalezení vhodného pravděpodobnostního rozdělení, dle kterého se vychází při simulaci cenového vývoje aktiv a v závěrečné části kapitoly je proveden odhad cenového vývoje aktiv pomocí simulace Monte Carlo.

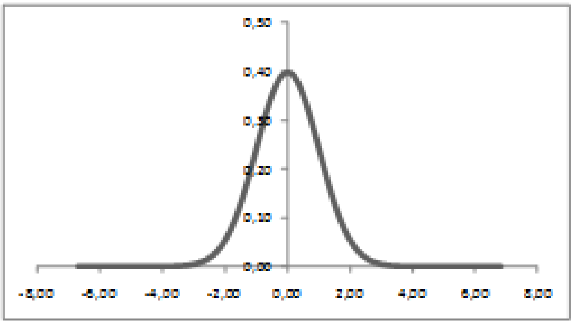
Teoretický základ kapitoly je v souladu především s Alexander (2008), Tichý (2006) a Zmeškal (2004).

3.1 Druhy rozdělení pravděpodobnosti

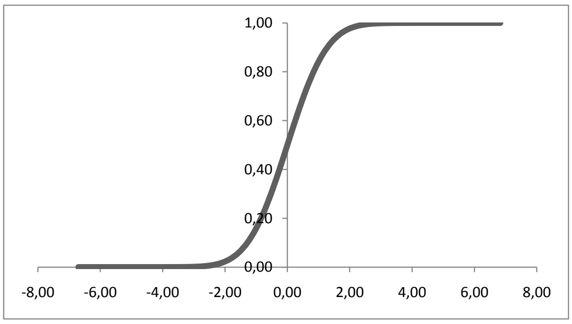
Ceny nebo výnosy finančních aktiv lze označit za náhodné proměnné, neboť na základě celé řady mnohdy i těžko předvídatelných vlivů se následující vývoj finančních aktiv považuje za neznámý. Přesnou cenu nebo výnos z aktiva tedy určit nelze. Je však možno stanovit pravděpodobnost, se kterou bude dané aktivum určitých hodnot nabývat.

Pravděpodobnostní rozdělení lze charakterizovat jako funkci závislosti pravděpodobnosti na náhodné veličině. Graficky je pravděpodobnostní rozdělení obvykle zobrazováno pomocí funkce hustoty a distribuční funkce. Na ose x je vždy náhodná veličina, na ose y je zachycena pravděpodobnost. V Grafu 3.1 je znázorněna funkce hustoty, kde ke každému bodu na ose x je přiřazena určitá pravděpodobnost. V Grafu 3.2 je zachycena distribuční funkce zobrazující kumulativní pravděpodobnosti.

Graf 3.1 Funkce hustoty



Graf 3.2 Distribuční funkce



Mezi nejvýznamnější rozdělení pravděpodobnosti pro finanční aplikace, patří normální rozdělení a Studentovo t-rozdělení. Teoretický základ pro normální a Studentovo t-rozdělení vychází z Alexander, Volume I. (2008).

3.1.1 Normální rozdělení

Náhodná proměnná X má normální rozdělení, jestliže se funkce hustoty rovná

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \tag{3.1}$$

kde μ vyjadřuje střední hodnotu, σ^2 zobrazuje rozptyl a proměnná X nabývá hodnot z intervalu $(-\infty;\infty)$. Křivka funkce hustoty normálního rozdělení je symetrická s vrcholem soustředěným ve střední hodnotě μ a rozptylem určeným směrodatnou odchylkou σ. Když má proměnná X normální rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ označuje se takto $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Normované normální rozdělení je určeno střední hodnotou rovnou 0 a směrodatnou odchylkou rovnou 1. Pro standardní normální náhodnou proměnnou se často užívá označení Z. Jakoukoliv náhodnou proměnnou lze pomocí standardní normální transformace přeměnit na standardní normální proměnnou. Transformace náhodné proměnné na standardizovanou je velmi jednoduchá, řídí se vztahem

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}. \tag{3.2}$$

Díky svým vlastnostem, zejména jednoduchosti spočívající v potřebě pouze dvou snadno zjistitelných parametrů (μ , σ), je normální rozdělení v praxi značně využíváno. Tzn., že pokud jsou známy hodnoty těchto dvou parametrů je známé také celé pravděpodobnostní rozdělení.

3.1.2 Studentovo t-rozdělení

Ve Studentově t-rozdělení je obsažen pouze jeden parametr. Tento parametr nazývající se stupeň volnosti je běžně označován písmenem v. Studentovo t-rozdělení úzce souvisí s normovaným normálním rozdělením a s rostoucím stupněm volnosti se k tomuto přibližuje. Při praktických aplikacích pro $v \geq 30$ se rozdělení považuje již za normální. Čím nižší je stupeň volnosti, tím nižší je vrchol křivky funkce hustoty a tím těžší jsou její konce.

Funkce hustoty pro Studentovo t-rozdělení s v stupni volnosti je definována takto,

$$f_v(t) = (v\pi)^{-1/2}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}, \tag{3.3}$$

kde gamma funkce Γ je rozšířením funkce faktoriálu $n!$ na neceločíselné hodnoty. Náhodná proměnná T, která má Studentovo t-rozdělení se značí $T \sim t_v$. Rozdělení má střední hodnotu 0 a pro $v > 2$ rozptyl

$$\sigma^2 = v(v-2)^{-1}. \tag{3.4}$$

Lineární transformací rozdělení (3.3) je získáno zobecněné t-rozdělení. Jestliže je nastaveno $X = \mu + \sigma T$, pak X má zobecněné t-rozdělení s funkcí hustoty

$$f_v(x|\mu,\beta) = (\beta v\pi)^{-1/2}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\left(1+\frac{(x-\mu)^2}{\beta v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}, \tag{3.5}$$

kde μ je střední hodnota a rozptyl je definován

$$\sigma^2 = \beta v(v-2)^{-1}. \tag{3.6}$$

V případě, že $\sigma^2 = 1$ pak $\beta v = v - 2$.

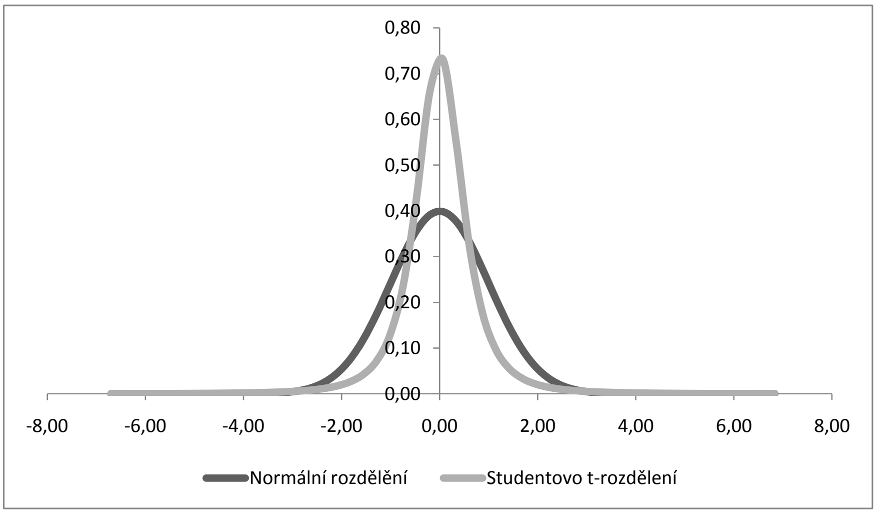
Nastavením $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tzn. $\beta v = v - 2$, je získána funkce hustoty pro standardizované Studentovo t-rozdělení, formulovaná takto

$$f_v(x) = ((v-2)\pi)^{-1/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{v-2}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}. \tag{3.7}$$

Zápis náhodné proměnné X, která má standardizované Studentovo t-rozdělení s funkcí hustoty (3.7), je $X \sim t_v(0,1)$.

Graf 3.3 zobrazuje srovnání funkce hustoty normovaného normálního rozdělení a standardizovaného Studentova t-rozdělení. Z grafického srovnání lze pozorovat nižší špičatost normálního rozdělení a těžší konce Studentova t-rozdělení.

Graf 3.3 Grafické srovnání normovaného normálního rozdělení se standardizovaným Studentovým t-rozdělením



3.2 Modely stanovení volatility

Volatilita σ je jedním ze základních parametrů při řízení finančních rizik. Vyjadřuje míru nejistoty ohledně budoucího vývoje ceny aktiva. Pro investora pohybujícího se na finančním trhu je míra nejistoty velmi důležitým parametrem při rozhodování o investici do příslušného aktiva. Investoři averzní k riziku budou vyhledávat aktiva s nízkou volatilitou, investoři se s klonem k riziku budou naopak vyhledávat aktiva s vyšší volatilitou. Obecně platí, že aktiva s větší volatilitou mohou dosahovat vyšších výnosů.

3.2.1 Historický přístup

Parametr volatility lze stanovit několika způsoby. Nejčastěji je v praxi využíváno historického přístupu, vycházejícího z předpokladu, že očekávaný výnos aktiva je roven průměrné hodnotě reálných výnosů za určité období a riziko aktiva je dáno směrodatnou odchylkou z historického výběru skutečných výnosů aktiva.

Dle časových intervalů lze sledovat ceny aktiv v různých časových intervalech, např. den, týden, měsíc nebo rok. Z těchto intervalů je potom pomocí přirozených logaritmů stanoven spojitý výnos,

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}, \tag{3.8}$$

kde R_t zobrazuje spojitý výnos, P_t vyjadřuje cenu aktiva v čase t a P_{t-1} cenu aktiva v čase $t-1$.

Pro určení volatility je třeba stanovit průměrný výnos neboli střední (očekávanou) hodnotu výnosu, rozptyl a nakonec směrodatnou odchylku.

Průměrný výnos je dán vztahem,

$$E(R_t) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} R_t , \tag{3.9}$$

rozptyl z těchto výnosů,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \left[R_t - E(R_t)\right]^2 , \tag{3.10}$$

a z definice rozptylu lze získat směrodatnou odchylku,

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2} . \tag{3.11}$$

3.2.2 Adaptační metody

Historický přístup mnohdy nesplňuje předpoklad homoskedasticity, a proto je ke stanovení volatility nutno využít adaptačních metod. Základem těchto metod je určení podmíněného rozptylu. Mezi adaptační metody patří např. ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) a EWMA (Exponentially Weight Moving Average).

GARCH model pro predikci na jedno období je vyjádřen takto,

$$\sigma_{t+1,t}^2 = \omega + \alpha \cdot \varepsilon_t^2 + \beta \cdot \sigma_{t,t-1}^2, \tag{3.12}$$

kde $\sigma_{t+1,t}^2$ je rozptyl predikovaný v čase t na období $t+1$ (následující období), ε_t^2 je skutečný rozptyl, $\sigma_{t,t-1}^2$ je odhadovaný rozptyl v čase $t-1$ na čas *t* a ω, α, β představují odhadované parametry. Tyto parametry musí splňovat podmínku nezápornosti ω, α, $\beta \geq 0$ a zároveň $\alpha + \beta < 1$.

Použití modelu GARCH může být komplikované. Proto se v praktických metodikách užívá zjednodušených modelů, za jejichž příklad lze považovat právě EWMA model (Exponentially Weight Moving Average) s jedním parametrem. Výhodou EWMA modelu je, že při jeho aplikaci není nutné vycházet z dlouhé řady historických dat. Každá následující hodnota je vypočtena z hodnoty předchozí. Další významnou výhodou oproti modelu GARCH je snadný odhad a predikce rozptylu.

Předpokladem modelu jsou vztahy $\omega = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ a $\beta = \lambda$, na jejichž základě lze z rovnice (3.12) definovat model EWMA,

$$\sigma_{t+1,t}^2 = (1-\lambda) \cdot \varepsilon_t^2 + \lambda \cdot \sigma_{t,t-1}^2, \tag{3.13}$$

$$\sigma_{t+1,t} = \sqrt{(1-\lambda) \cdot \varepsilon_t^2 + \lambda \cdot \sigma_{t,t-1}^2}, \tag{3.14}$$

kde λ musí nabývat pouze hodnot z intervalu <0;1>. Parametr λ označovaný jako tlumící faktor určuje míru vlivu historických dat při výpočtu predikovaného rozptylu. Jestliže $\lambda = 1$, jedná se o homoskedasticitu, tedy konstantní rozptyl. V tomto případě mají nejvyšší váhu nejnovější data nejmenší váhu ta nejstarší. Pokud se λ blíží se k nule, jedná se o adaptační proces, který je významně ovlivněn právě historickými daty. Rozptyl je tedy závislý na čase.

Tlumící faktor lze odhadnout metodou maximální věrohodnosti nebo prostřednictvím minimalizace kritéria RMSE (Root Mean Square Error) definovaného takto,

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_t z_t} \ , \tag{3.15}$$

$$\text{přičemž } z_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_{t,t-1}^2 , \tag{3.16}$$

kde z_t je chyba predikce, tj. rozdíl mezi skutečností a predikcí.

3.3 Popis metody simulace Monte Carlo

Simulace Monte Carlo je numerický proces využívající statistickou simulaci pro generování náhodného vývoje aktiva nebo portfolia aktiv. Tuto metodu lze taktéž využít pro hledání hodnot finančních derivátů se složitějšími výplatními funkcemi.

Přesnost dosažených výsledků odhadu je závislá na počtu provedených simulací. Důkazem přesnosti je např. hladší průběh pravděpodobnostního rozdělení konečné ceny aktiva s větším počtem provedených simulací, viz Tichý (2006, str. 116).

3.3.1 Stochastické procesy

Vzhledem k tomu, že se ceny aktiv v čase vyvíjejí nahodilým způsobem, je tento proces označován jako stochastický. Stochastické procesy lze dle vztahu ke změně času rozdělit na procesy v diskrétním čase (t = 0, 1, 2, …) a procesy ve spojitém čase ($t \in <0, \infty$). Podobně lze proces rozlišit podle ceny měnící se buď diskrétně, nebo spojitě.

Základním prvkem stochastických procesů je tzv. *Wienerův specifický proces* vycházející z několika následujících předpokladů:

- sleduje tzv. Markovův proces, který je charakteristický svou nezávislostí na historickém vývoji aktiva a naopak závislostí na jeho současné ceně.
- Změny cen jsou v čase spojité a nezávislé,
- střední hodnota = 0 a rozptyl = *dt,* kde *dt* je přírůstek času.

Wienerův proces pro jedno období je definován následovně,

$$\tilde{z}_t - z_0 \equiv dz = \tilde{z} \cdot \sqrt{dt} \ , \tag{3.17}$$

kde $\tilde{z}$ představuje náhodnou proměnnou z normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$. Dále platí, že střední hodnota $E(dz)=0$, rozptyl $\text{var}(dz)=t$ a směrodatná odchylka $\sigma(dz)=\sqrt{t}$.

Celková změna $\tilde{z}$ je dána součtem změn v N malých časových intervalech, kde $N=\frac{T}{\Delta t}$. Pro více období je pak Wienerův proces definován následovně,

$$\tilde{z}_T-\tilde{z}_0=\sum_{i=1}^{n}\tilde{z}_i\cdot\sqrt{dt}\,, \tag{3.18}$$

z tohoto výrazu lze odvodit, že $E(\tilde{z}_T)=0$, $\text{var}(\tilde{z}_T)=n\cdot dt=T$ a $\sigma(\tilde{z}_T)=\sqrt{T}$.

Itôův proces je jedním z obecných typů stochastických procesů. Tento proces zahrnuje jako zvláštní případy Wienerovy a Brownovy procesy. Pro proměnnou x je definován takto,

$$dx=a(x;t)\cdot dt+b(x;t)\cdot dz\,, \tag{3.19}$$

kde $a(\cdot)$ je přírůstek a $b(\cdot)$ je směrodatná odchylka změny proměnné.

Obdobou Taylorova rozvoje, který je vymezen pro nestochastické funkce, je Itôova lema. Přičemž Itôova lema je definována pro funkce, jejichž proměnnými jsou stochastické procesy a čas, $G=f(x,t)$.

$$dG=\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\cdot a(\cdot)\right)+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot b^2(\cdot)\right]\cdot dt+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot b(\cdot)\cdot dz\,, \tag{3.20}$$

tento vztah je Iôovým procesem s přírůstkem $\frac{\partial G}{\partial x}\cdot a(\cdot)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot b^2(\cdot)+\frac{\partial G}{\partial t}$ a směrodatnou odchylkou $\frac{\partial G}{\partial x}\cdot b(\cdot)$.

Zvláštním případem Itôova procesu je *Brownův aritmetický proces*, označovaný také jako zobecněný Wienerův proces. Oproti specifickému Wienerovu procesu, který představuje pouze proces s náhodnou složkou, Brownův aritmetický proces obsahuje mimo náhodnou složku také složku trendovou. Vlastností tohoto procesu jsou konstantní parametry nezávislé na ostatních proměnných. Brownův aritmetický proces je vymezen vztahem,

$$dx = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz \,. \tag{3.21}$$

Obsahem pravé části rovnice je trendová a reziduální složka. Trendovou složkou je vyjádřena změna veličiny x v časovém intervalu dt o hodnotu $\alpha \cdot dt$. Reziduální složka je tvořena součinem specifického Wienerova procesu dz a směrodatnou odchylkou σ vyjadřující přírůstek veličiny x za jednotkový časový interval. Parametry α a σ jsou konstanty. Aritmetický Brownův proces je proces s lineárním cenovým vývojem, což dokazují následující vztahy $E(dx) = \alpha \cdot dt$ a $\mathrm{var}(dx) = \sigma^2 \cdot dt$.

Výpočet střední hodnoty a rozptylu veličiny x v čase T je formulován takto,

$$E(x_T) = x_0 + \alpha \cdot T \,, \tag{3.22}$$

$$\mathrm{var}(x_T) = \sigma^2 \cdot T \,. \tag{3.23}$$

Dalším procesem, dle kterého se vyvíjejí např. akcie, akciové indexy a měny, je *Brownův geometrický proces*, pro který je typický exponenciální vývoj proměnné. Proces je definován takto,

$$dx = \alpha \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dz \,. \tag{3.24}$$

Výše uvedený vztah lze vyjádřit i tak, aby byla zjevná interpretace jednotlivých parametrů celého procesu,

$$\frac{dx}{x} = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz \,, \tag{3.25}$$

kde α vyjadřuje průměrný výnos obvykle za období jednoho roku a σ směrodatnou odchylku za rok.

Brownův proces, u něhož se proměnná vyvíjí dle Brownova geometrického procesu a využívá se Itôovy lemy pro funkci $G = \ln x$, se nazývá *geometrický Brownův proces s logaritmickými cenami*. Tento proces lze definovat jako,

$$dG = d \ln S = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz \,. \tag{3.26}$$

Jedná se o vyjádření spojitého výnosu, tedy $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ a $\mu = \ln \frac{S_T}{S}$. Dále platí tyto vztahy,

$$x_t = x \cdot \exp(\alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz), \tag{3.27}$$

$$E(x_T) = x \cdot \exp(\alpha \cdot T), \tag{3.28}$$

$$\mathrm{var}(x_T) = x^2 \cdot \exp(2 \cdot \alpha \cdot T) \cdot \left[\exp(\sigma^2 \cdot T) - 1\right]. \tag{3.29}$$

3.3.2 Mean reversion procesy

Mean reversion procesy jsou procesy, podle kterých se odhaduje například náhodný vývoj úrokových sazeb. U úrokových sazeb není možné využít modely aplikovatelné na akcie (př. Brownův geometrický proces), protože lze v jejich vývoji sledovat sklon k návratu na úroveň dlouhodobých rovnovážných sazeb.

V těchto modelech je obvykle zastoupen parametr pro dlouhodobou rovnováhu a rychlost přibližování sazeb k této dlouhodobé rovnováze. Každý z procesů obsahuje také specifický Wienerův proces. Mezi nejznámější a nejpoužívanější stochastické modely úrokových sazeb patří Rendleman-Bartterův model, Ho-Leeův model, Black-Derman-Toyův model, Vašíčkův model, Cox-Ingersoll-Rossův model, Hull-Whiteův model a Black-Karasinského model.

3.3.3 Generování náhodných čísel

Aby mohla být simulace provedena, je nutno mít k dispozici potřebnou výpočetní techniku a software. Důležitým krokem je dle příslušného pravděpodobnostního rozdělení vygenerovat náhodná čísla $\tilde{z}$, neboť právě tato čísla ovlivňují to, jak se bude hodnota finančního aktiva pravděpodobně vyvíjet. K tomuto kroku slouží generátory náhodných čísel odpovídajícího rozdělní.

Pro získání náhodných čísel s pravděpodobnostním rozdělením $N(0,1)$ se běžně využívá analytického nástroje *Generátor pseudonáhodných čísel* v programu MS Excel. O pseudonáhodná čísla se jedná proto, že to jsou čísla generovaná na základě předdefinovaného algoritmu, který je sestaven tak, aby splňoval určené testy náhodnosti.

Generování náhodných čísel se standardizovaným Studentovým t-rozdělením je poněkud složitější než použití analytického nástroje *Generátor pseudonáhodných čísel*. Inverzní *t* distribuční funkce v programu MS Excel totiž navrátí pouze kladnou část realizací. Ke dvěma symetrickým číslům totiž náleží stejná pravděpodobnost. Pro generování náhodných čísel je důležité, zda je pravděpodobnost (hladina významnosti) větší či menší než 0,5. Při výpočtu v MS Excel je nutno použít tuto formuli

$$t_v^{-1}(\alpha) = \begin{cases} -TINV(2\alpha, v), & když\ \alpha \leq 0{,}5, \\ TINV(2(1-\alpha), v), & když\ \alpha > 0{,}5, \end{cases} \tag{3.30}$$

kde α je pravděpodobnost (hladina významnosti). Pro získání nových náhodných čísel stačí stisknout klávesu F9.

Aby mohla být náhodná čísla Studentova t-rozdělení v simulaci použita, je nezbytné provést jejich standardizaci. K provedení standardizace se využívá vztahu

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{v-2}{v}} \cdot t, \tag{3.31}$$

kde $\tilde{t}$ je standardizované náhodné číslo, v jsou stupně volnosti a t je náhodné číslo vygenerované dle vzorce (3.30).

3.4 Statistické stanovení parametrů a simulace cen vybraných aktiv

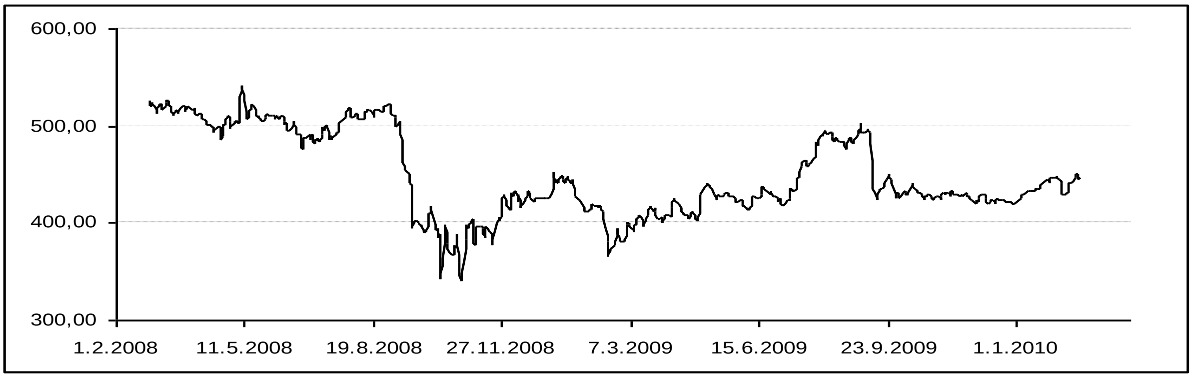
Metody obecně vysvětlené v předchozím textu lze aplikovat na jednoduchém případu investora, jenž si pro zhodnocení svých prostředků zvolil akcie. Investor tak podstupuje tržní akciové riziko, k jehož zajištění si vybral portfolio forwardů na různé akcie. Jeho hedgingové portfolio se skládá ze dvou rizikových akcií, a to Telefónica O2 C.R. a Microsoft Corp. a tří forwardů na akcii Unipetrol, McDonalds Corp. a Volkswagen AG.

Aby bylo možné aplikovat zvolené hedgingové strategie, je nejprve nutné provést výpočet základních parametrů aktiv, jako jsou střední hodnota výnosu, směrodatná odchylka, korelace a kovariance výnosů. Dále je třeba realizovat odhad vývoje cen aktiv pomocí simulace Monte Carlo. Grafy týkající se vývoje cen, spojitých výnosů, rozdělení pravděpodobnosti a simulace cenového vývoje jednotlivých aktiv jsou uvedeny v přílohách. Pro přehled budou v diplomové práci uvedeny pouze tabulky a grafy související s akcií Telefónica O2 C.R.

3.4.1 Propočet parametrů aktiv

Pro výpočet zvolených parametrů je nezbytné nalézt vstupní data, která vychází z historických údajů cen akcií zveřejněných na webových stránkách RM-Systému. Ceny akcií jsou sledovány denně po dobu dvou let v období od 26. 2. 2008 do 19. 2. 2010. Historický vývoj cen a spojitých výnosů všech pěti aktiv je pomocí grafů zobrazen v Příloze 1. Dvouletý vývoj ceny akcie společnosti Telefónica O2 C.R. je znázorněn v Grafu 3.4.

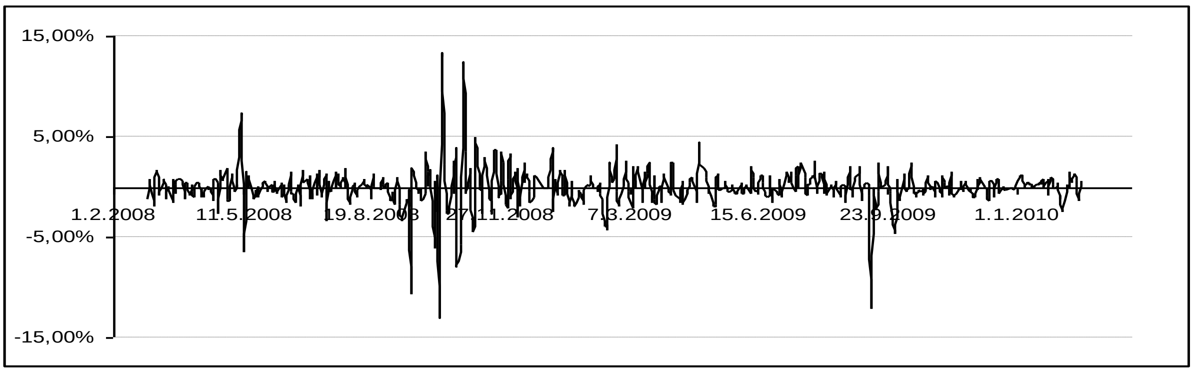
Graf 3.4 Vývoje ceny akcie Telefónica O2 C.R.



Na základě předpokladu konstantního rozptylu lze pro stanovení parametrů využít historický přístup. Denní spojité výnosy jsou vypočteny na základě vztahu (3.8), střední hodnota výnosu dle rovnice (3.9) a směrodatná odchylka dle (3.11).

Denní spojité výnosy akcie Telefónica O2 C.R. jsou uvedeny v Grafu 3.5.

Graf 3.5 Spojité výnosy akcie Telefónica O2 C.R.



Odhad vývoje cen aktiv bude proveden s týdenními intervaly. Proto je třeba hodnoty parametrů přepočítat z denních hodnot na týdenní. Např. týdenní hodnoty parametrů akcie Telefónica O2 C.R. se rovnají:

střední hodnota výnosů $E(R_i) = -0{,}000323 \cdot 5 = -0{,}0016$

a směrodatná odchylka $\sigma_i = 0{,}01905 \cdot \sqrt{5} = 0{,}0426$.

Hodnoty parametrů všech akcií jsou uvedeny v Tabulce 3.1.

Tabulka 3.1 Hodnoty parametrů akcií

		Telefónica O2 C.R.	Microsoft Corp.	Unipetrol	McDonalds Corp.	Volkswagen AG
denní	E(Ri)	-0,03%	0,03%	-0,15%	0,05%	-0,16%
	$_z\sigma_i$	1,91%	2,23%	3,23%	2,03%	3,62%
týdenní	E(Ri)	-0,16%	0,13%	-0,76%	0,23%	-0,81%
	$_z\sigma_i$	4,26%	4,98%	7,22%	4,55%	8,09%

Korelace výnosů aktiv jsou uvedeny v Tabulce 3.2 a kovariance v Tabulce 3.3. Z Tabulky 3.2 Korelace výnosů je zřejmé, že na sobě aktiva, snad kromě určité pozitivní závislosti akcií Telefónica O2 C.R. a Unipetrolu, nejsou výrazně závislá, tzn. jsou nekorelovaná. Pro investora je tato skutečnost podstatná, protože čím více je investováno do různých akcií s nízkou vzájemnou závislostí, tím větší je možnost částečného vyrovnání příznivých a nepříznivých faktorů.

Tabulka 3.2 Korelace výnosů aktiv

	Telefónica O2 C.R.	Microsoft Corp.	Unipetrol	McDonalds Corp.	Volkswagen AG
Telefónica O2 C.R.	1,0000	0,1842	0,5037	0,2449	0,0955
Microsoft Corp.	0,1842	1,0000	0,2477	0,2973	0,0312
Unipetrol	0,5037	0,2477	1,0000	0,1847	0,1668
McDonalds Corp.	0,2449	0,2973	0,1847	1,0000	-0,0087
Volkswagen AG	0,0955	0,0312	0,1668	-0,0087	1,0000

Tabulka 3.3 Kovariance výnosů aktiv

	Telefónica O2 C.R.	Microsoft Corp.	Unipetrol	McDonalds Corp.	Volkswagen AG
Telefónica O2 C.R.	0,0004	0,0001	0,0003	0,0001	0,0001
Microsoft Corp.	0,0001	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000
Unipetrol	0,0003	0,0002	0,0010	0,0001	0,0002
McDonalds Corp.	0,0001	0,0001	0,0001	0,0004	0,0000
Volkswagen AG	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000	0,0013

Dalším velmi důležitým krokem je stanovení vhodného rozdělení pravděpodobnosti, podle kterého se bude vycházet při simulaci následujícího cenového vývoje aktiv. Výběr rozdělení bude proveden mezi normovaným normálním rozdělením a standardizovaným Studentovým t-rozdělením.

U normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ jsou oba parametry, potřebné k sestavení funkce hustoty, známé. Oproti tomu parametr v stupně volnosti nezbytný pro výpočet rozdělení pravděpodobnosti u standardizovaného Studentova t-rozdělení je neznámý.

Stupeň volnosti lze získat zpracováním úlohy *Metoda maximální věrohodnosti* (Maximum Likelihood).

Účelová funkce: $L = \ln \sum_i f(x_i) \rightarrow \max$

kde $v = ?$,

kde L je funkce maximální věrohodnosti a $f(x_i)$ znázorňuje rovnici (3.7), tedy funkci hustoty pro standardizované Studentovo t-rozdělení pro i pokusů.

Postup pro nalezení parametru v stupeň volnosti.

1. Nejprve je nutné standardizovat výnosy aktiva, aby se $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.

2. Pro jednotlivá aktiva je odhadnuta hodnota stupně volnosti a pro každé pozorování se vypočítá pravděpodobnost pro standardizované Studentovo t-rozdělení, dle vzorce (3.7).

3. Dále je proveden součet vypočtených pravděpodobností založený na odhadnutém stupni volnosti.

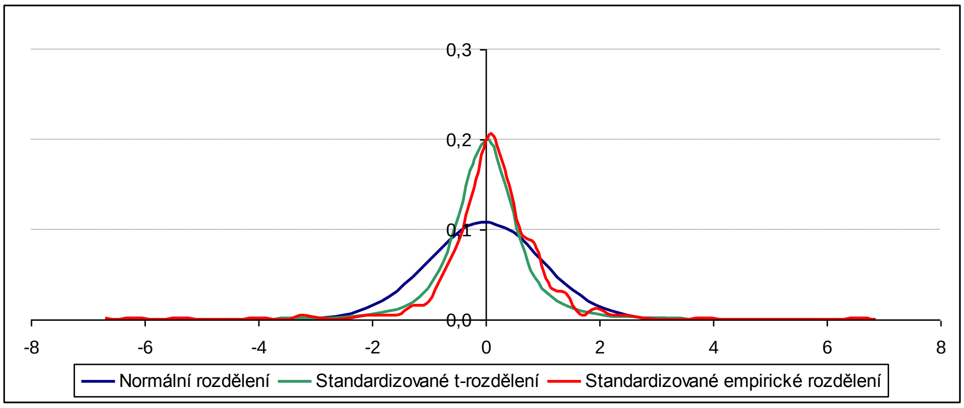
4. Nakonec je v MS EXCEL pomocí nástroje Řešitel nalezen parametr stupeň volnosti, který maximalizuje součet vypočtených pravděpodobností.

Nyní jsou známy všechny potřebné parametry pro nalezení vhodného rozdělení pravděpodobnosti výnosů použitých aktiv. Následuje vysvětlení kroků, pomocí nichž budou vypočtena, graficky zobrazena a porovnána jednotlivá rozdělení pravděpodobnosti.

1. Nejprve je provedena standardizace výnosů dle vzorce (3.2),
2. dále jsou standardizované výnosy rozděleny např. do 50 tříd,
3. následuje výpočet pravděpodobností náležejících k jednotlivým třídám,
    a. kde u normovaného normálního rozdělení se v MS Excel využívá funkce NORMDIST,
    b. u Studentova t-rozdělení se vychází z rovnice (3.7),
    c. standardizované empirické rozdělení je odvozeno z četností historických výnosů zařazených do jednotlivých tříd.
4. Dalším krokem je vytvoření grafu s křivkami funkce hustoty jednotlivých pravděpodobnostních rozdělení,
5. a rozhodnutí, ke kterému pravděpodobnostnímu rozdělení se přibližuje empirické pravděpodobnostní rozdělení.

V Grafu 3.6 jsou zobrazeny funkce hustoty jednotlivých pravděpodobnostních rozdělení akcie Telefónica O2 C.R. Z grafu je zřejmé, že se empirické rozdělení pravděpodobnosti přibližuje právě ke standardizovanému Studentovu t-rozdělení. Přehledná tabulka týkající se postupu nalezení vhodného pravděpodobnostního rozdělní pro akcii Telefónica 02 je uvedena v Příloze 2.

Graf 3.6 Rozdělení pravděpodobnosti výnosů akcie Telefónica O2 C.R.



Stejný test byl proveden pro všechna vybraná aktiva. Na základě grafů uvedených v Příloze 3 lze konstatovat, že pravděpodobnostní rozdělení všech aktiv se přibližuje ke standardizovanému Studentovu t-rozdělení.

3.4.2 Simulace cen aktiv

Pro akcie je charakteristický náhodný vývoj v čase a vzhledem k tomu, že nemají tendenci vracet se k určité rovnovážné hladině, lze vyloučit tzv. mean-reversion proces, který je charakteristický především pro úrokové sazby. Simulace cen akcií na příštích 16 týdnů bude tedy provedena na základě geometrického Brownova pohybu s logaritmickými cenami.

Postup pro simulaci cen pomocí metody Monte Carlo:

1. sběr historických dat dvouletého vývoje ceny aktiva,
2. výpočet spojitých výnosů dle vztahu (3.8), stanovení střední hodnoty výnosu a směrodatné odchylky na základě vztahů (3.9) a (3.11),
3. vygenerování náhodných prvků požadovaného pravděpodobnostního rozdělení. V podkapitole 3.4.1 bylo zjištěno, že se vývoj akcií řídí podle standardizovaného Studentova t-rozdělení a proto se při generování náhodných prvků bude postupovat dle formulace (3.30) a (3.31).
4. Posledním krokem je určení konečné ceny aktiva pro každý z n scénářů dle vzorce (3.27), který je možné pro ceny akcií formulovat také jako

$$S_t = S_{t-1} \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{t} \cdot \sqrt{dt}\right]. \tag{3.32}$$

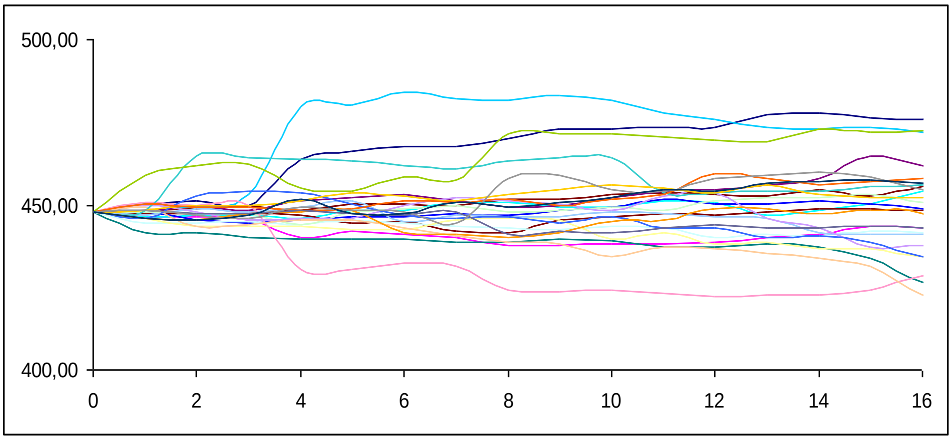
kde S_t znázorňuje cenu akcie v čase t, S_{t-1} je cena akcie v čase $t-1$ a $\tilde{t}$ je náhodná proměnná dle Studentova t-rozdělení. Parametry potřebné k výpočtu konečné ceny aktiva pro každý z n scénářů jsou uvedeny v Tabulce 3.4.

Tabulka 3.4 Vstupní hodnoty pro provedení simulací

	Telefónica O2 C.R.	Microsoft	Unipetrol	McDonalds	Volkswagen AG
Střední hodnota	-0,16%	0,13%	-0,76%	0,23%	-0,81%
Směr. odchylka	4,26%	4,98%	7,22%	4,55%	8,09%
Stupně volnosti	2,6350	3,6621	2,7937	3,0637	2,7748
Interval (1 týden)	0,0192	0,0192	0,0192	0,0192	0,0192
Výchozí cena akcie	448	547,3	138	1208	1680
Počet scénářů	1000	1000	1000	1000	1000

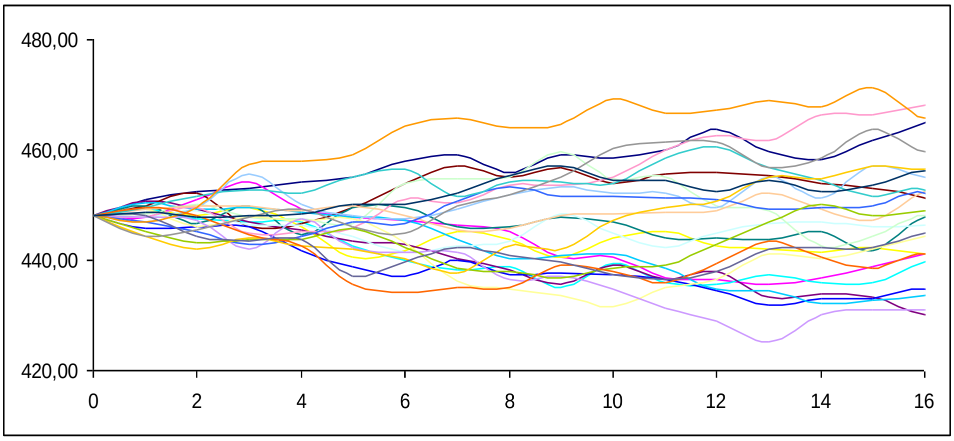
Náhodný vývoj cen jednotlivých akcií na příštích 16 týdnů je simulován pro 1000 scénářů. Simulace všech pěti akcií pro prvních 25 scénářů jsou graficky uvedeny v Příloze 4. Prvních 25 scénářů simulace ceny akcie Telefónica O2 C.R. je zobrazeno v Grafu 3.7. Z Grafu 3.7 jsou zřejmé významné cenové skoky akcií způsobené zvoleným pravděpodobnostním rozdělením. Cenový vývoj akcie se totiž chová dle standardizovaného Studentova t-rozdělení, jehož funkce hustoty má vysokou špičatost a dlouhé konce. Právě dlouhé konce způsobují nahodilé cenové skoky.

Graf 3.7 Simulované hodnoty ceny akcie Telefónica O2 C.R. (vývoj ceny závisí na standardizovaném Studentovu t-rozdělení)



Pouze pro porovnání je v Grafu 3.8 uvedena simulace ceny akcie Telefónica O2 C.R. odvíjející se od náhodných prvků z normovaného normálního rozdělení. Z Grafu je patrný hladší průběh vývoje ceny aktiva bez nenadálých větších skoků.

Graf 3.8 Simulované hodnoty ceny akcie Telefónica O2 C.R. (vývoj ceny závisí na normovaném normálním rozdělení)



Z historických dat je zřejmé, že ceny aktiv mohou v závislosti na mnoha faktorech podléhat nenadálým skokům v jakémkoliv směru, viz Příloha 1. Na základě provedeného testu pro nalezení vhodného pravděpodobnostního rozdělení bylo zjištěno, že se vývoj aktiv chová podle Studentova t- rozdělení. Studentovo t-rozdělení bylo proto použito při generování náhodné proměnné podstatné pro simulaci následujícího vývoje aktiv. Také z Grafů 3.7 a 3.8, zobrazujících simulace stejného aktiva s odlišným pravděpodobnostním rozdělením, je zřejmé, že při simulaci bylo využití Studentova t-rozdělení správnou volbou. Vývoj aktiva podle Studentova t-rozdělení je totiž z hlediska chování cen akcií na finančních trzích realističtější.

4 Ověření vybraných hedgingových strategií

V této kapitole jsou porovnány vybrané strategie zajištění. Zajištění je provedeno prostřednictvím hedgingové strategie minimalizace rozptylu a srovnány jsou dva případy, a to zajištění statickým a dynamickým hedgingem.

Nejprve jsou uvedeny základní informace o aktivech, vycházející z předchozí kapitoly, poté jsou popsány principy vybraných hedgingových strategií. Dalším krokem je ocenění zajišťovacích instrumentů a pomocí Lagrangeova multiplikačního teorému je nalezeno jejich optimální množství. Následně jsou vypočítány efekty obou strategií, které jsou pak vyhodnoceny podle stanovených kritérií.

4.1 Vstupní informace

V předchozí kapitole bylo zmíněno, že ověření vybraných strategií souvisí se zajištěním rizik investora, jenž si pro zhodnocení svých prostředků zvolil akcie. Investor tak podstupuje tržní akciové riziko, k jehož zajištění si vybral portfolio forwardů na různé akcie.

Hedgingové portfolio se skládá ze dvou rizikových akcií, a to Telefónica O2 C.R. a Microsoft Corp. a tří forwardů na akcii Unipetrol, McDonalds Corp. a Volkswagen AG. Množství obou rizikových aktiv je určeno pevně na 5 kusů. Optimální množství zajišťovacích instrumentů bude stanoveno v podkapitole 4.3 pomocí Lagrangeova multiplikačního teorému. Časový horizont investice je vymezen na dobu jednoho měsíce, kdy pokaždé na konci týdne dojde k vypořádání.

K praktickému znázornění různých forem zajištění jsou vybrány dvě konkrétní strategie.

- *Statický hedging*, spočívá v nalezení optimálního množství forwardových kontraktů pouze na konci prvního týdne. V následujících třech týdnech pak nedochází v množství zajišťovacích instrumentů k žádným změnám a vypořádání se děje vždy na základě optimálního množství určeného v prvním týdnu.

- *Dynamický hedging*, je charakteristický postupnými revizemi portfolia, což znamená, že se optimální množství forwardů v portfoliu v každém dalším momentu vypořádání mění. Do splatnosti forwardu bude revize portfolia provedena čtyřikrát.

Výstupem použitých strategií je efekt, kterého společnost dosáhne jejich využitím. Efekt z vykonaných operací bude vyjádřen v českých korunách a může nabývat kladných anebo záporných hodnot (zisk nebo ztráta). Následně budou dosažené výsledky pro jednotlivé pokusy rozděleny do 50 intervalů, přičemž každému z nich bude přiřazen procentuální výskyt efektu pro daný interval. Výsledek je poté graficky zobrazen pomocí rozdělení pravděpodobnosti, které vyjadřuje, s jakou pravděpodobností dosáhne investor efektu zajištění v daném intervalu.

V praktické části třetí kapitoly byl kromě výpočtu základních parametrů, jako jsou střední hodnota, směrodatná odchylka nebo sestavení korelační a kovarianční matice výnosů, proveden také test rozdělení pravděpodobnosti výnosů aktiv a odhad cenového vývoje aktiv pomocí simulace Monte Carlo. Velmi důležitým výstupem této kapitoly je, že rozdělení pravděpodobnosti výnosů se přibližuje ke standardizovanému Studentovu t-rozdělení. Z toho pak vyplývá, že simulace budoucích cen vycházející z náhodných čísel standardizovaného Studentova t-rozdělení, podává reálnější obraz o vývoji aktiv než případná simulace vycházející z náhodných čísel normovaného normálního rozdělení.

4.2 Ocenění zajišťovacích instrumentů

Cenový vývoj akcií je již z předchozí kapitoly znám, a proto je možno přistoupit k ocenění zajišťovacích instrumentů. K zajištění jsou vybrány tři různé forwardové kontrakty na akcie. Doba splatnosti forwardových kontraktů je stanovena na měsíc. Investor se zajišťuje na měsíc dopředu, uzavře tak celkem ke každému ze tří podkladových aktiv 4 kontrakty s dobou životnosti postupně jeden, dva, tři a čtyři týdny.

Při ocenění forwardů na akcii se vychází ze vztahu (2.50), kdy musí platit, že výchozí hodnota forwardového kontraktu je v době jeho vzniku nulová. Při výpočtu realizačních cen jednotlivých kontraktů se vychází ze vztahu (2.46). Vstupní parametry pro ocenění forwardů a výsledná hodnota realizační ceny jsou uvedeny v Tabulce 4.1.

Tabulka 4.1 Vstupní hodnoty pro ocenění forwardového kontraktu

Akcie	S_0	*R*	*T-t*	*T-2t*	*T-3t*	*T-T*	*X*
Unipetrol	138	0,0192	0,998893	0,999262	0,999631	1	138,221
McDonalds Corp.	1208	0,0192	0,998893	0,999262	0,999631	1	1209,934
Volkswagen AG	1680	0,0192	0,998893	0,999262	0,999631	1	1682,69

Pro ukázku je uveden výpočet realizační ceny forwardu na akcii Unipetrol.

$$X = S_0 \cdot e^{R \cdot T} = 138 \cdot e^{0,01921/12} = 138,221,$$

kde za bezrizikovou sazbu *R* je použitá roční sazba PRIBOR, jejíž hodnota je platná ke dni 23. března 2010. Pokud $S_{1t} = 139,5601$pak se hodnota forwardu na akcii Unipetrol za 1 týden rovná,

$$f_{1t,T} = S_{1t} - X \cdot e^{-R \cdot (T-t)} = 139,5601 - 138,221 \cdot e^{-0,01920,998893} = 3,9647.$$

4.3 Nalezení optimálního množství zajišťovacích instrumentů

K nalezení počtu zajišťovacích instrumentů je nutné využít optimalizační úlohy *Lagrangeův multiplikační teorém*. Základem optimalizačních úloh je nalezení maximalizace nebo minimalizace funkce nějaké množiny.

K zajištění portfolia aktiv byla vybrána hedgingová strategie minimalizace rozptylu. Jak už z názvu vyplývá, optimalizační úlohou je právě minimalizace rozptylu. Velmi významnou vlastností Lagrangeova multiplikačního teorému je, že bere v úvahu korelace mezi aktivy portfolia.

Optimalizační úlohu lze formulovat následovně:

účelová funkce $\sigma^2 = \vec{x}^T \cdot C \cdot \vec{x} \rightarrow \min,$ (4.1)

za podmínky $x_i^a = h_i,$ (4.2)

kde $\vec{x}$ je vektor podílů rizikových aktiv, *C* je kovarianční matice, x_i^a je podíl rizikových aktiv a h_i je původně stanovený podíl rizikových aktiv. Vektor $\vec{x}$ zahrnuje jak riziková aktiva x_i^a tak zajišťovací instrumenty x_i^b.

Podíl aktiv se dá vyjádřit jako,

$$x_i = q_i \cdot S_i, \tag{4.3}$$

kde q_i určuje množství aktiva a S_i jeho cenu.

Pokud se do vztahu (4.1) za x dosadí (4.3) lze optimalizační úlohu formulovat takto,

účelová funkce $\sigma^2 = \vec{q}^T \cdot C' \cdot \vec{q} \rightarrow \min,$ (4.4)

za podmínky $q_i^a = k_i,$ (4.5)

kde C' je transformovaná kovarianční matice, tedy kovarianční matice vynásobená $\hat{S}$ diagonálními maticemi cen aktiv, q_i^a je počet rizikových aktiv a k_i je původně stanovený počet rizikových aktiv.

Optimální řešení dané úlohy lze nalézt tak, že se hledá optimální řešení Lagrangeovy funkce L, vytvořené z účelové funkce a podmínek upravených tak, aby se rovnaly nule. Lagrangeovu funkci lze formulovat takto,

$$L = \vec{q}^T \cdot C' \cdot \vec{q} - \sum_i \lambda_i \left(q_i^a - k_i\right) \rightarrow \min. \tag{4.6}$$

Řešení pro $\vec{q}$ a λ_i je následující,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 2 \cdot C \cdot \vec{q} - \sum_i \lambda_i = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = q_i^a - k_i = 0 \rightarrow q_i^a = k_i. \tag{4.8}$$

Rovnice (4.7) a (4.8) lze sdružit pomocí matic a vektorů a zapsat jako $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$. Požadavkem je nalezení optimálního množství zajišťovacích instrumentů, proto je nutné upravit rovnici do tvaru $\vec{y} = \vec{b} \cdot A^{-1}$, kde A^{-1} je inverzní matice k matici *A*. Vektor $\vec{y}$ je složen ze dvou částí, a to z počtu jednotlivých aktiv q_i a vyrovnávajících parametrů λ_i. Vektor $\vec{b}$ je složen z nulového vektoru a vektoru původního počtu rizikových aktiv k_i.

Inverzní matice A^{-1} je sestavena z transformované kovarianční matice C', ze dvou jednotkových matic a z jedné matice vyplněné nulami.

Pro lepší porozumění je výraz $\vec{y} = \vec{b} \cdot A^{-1}$ zaveden do Tabulky 4.2. Kde transformovaná kovarianční matice C' je vyznačena v červeně, počet rizikových aktiv k_i je označen v zelené tabulce, ve žluté tabulce jsou vyrovnávající parametry λ_i a hledaný výsledek, tedy počet zajišťovacích instrumentů je vyznačen v modré tabulce.

Tabulka 4.2 Praktická ukázka nalezení množství zajišťovacích instrumentů (1. krok, 1. scénář)

Matice A								vektor y		vektor b
145,8185	38,1475	1,1014	2,5052	1,3556	-1	0		5		0
38,1475	294,1868	0,7693	4,3196	0,6299	0	-1		5		0
1,1014	0,7693	0,0328	0,0283	0,0355	0	0		-251,6915		0
2,5052	4,3196	0,0283	0,7178	-0,0086	0	0	.	-37,61319	=	0
1,3556	0,6299	0,0355	-0,0086	1,3815	0	0		-0,954555		0
1	0	0	0	0	0	0		547,0892		5
0	1	0	0	0	0	0		1304,964		5

Kovarianční matice C i počet rizikových aktiv jsou neměnné. Transformovaná kovarianční matice C' a tím pádem i optimální počet zajišťovacích instrumentů se pak mění při změně cen aktiv, tzn. jak cen rizikových aktiv, tak i hodnot jednotlivých forwardů.

Z modře označené části Tabulky 4.2 je díky záporné hodnotě optimálního množství forwardových kontraktů zřejmé, že se tyto nástroje nachází v krátké pozici.

4.4 Aplikace hedgingových strategií

V této podkapitole jsou aplikovány zvolené formy hedgingových strategií, jejichž výstupem je rozdělení pravděpodobnosti dosaženého efektu dané strategie.

Zajištění portfolia aktiv bude provedeno na principu minimalizace rozptylu. Při sestrojení hedgingového portfolia složeného z různorodých aktiv se vychází z rovnice

$$\Pi_t = \sum_i Q_i \cdot S_{i,t} - \sum_i h_i \cdot f_{i,t,T} \ , \qquad (4.9)$$

kde i vyjadřuje jednotlivá aktiva.

Celkový efekt hedgingové strategie je vyjádřen součtem hodnot portfolií za jednotlivé okamžiky vypořádání,

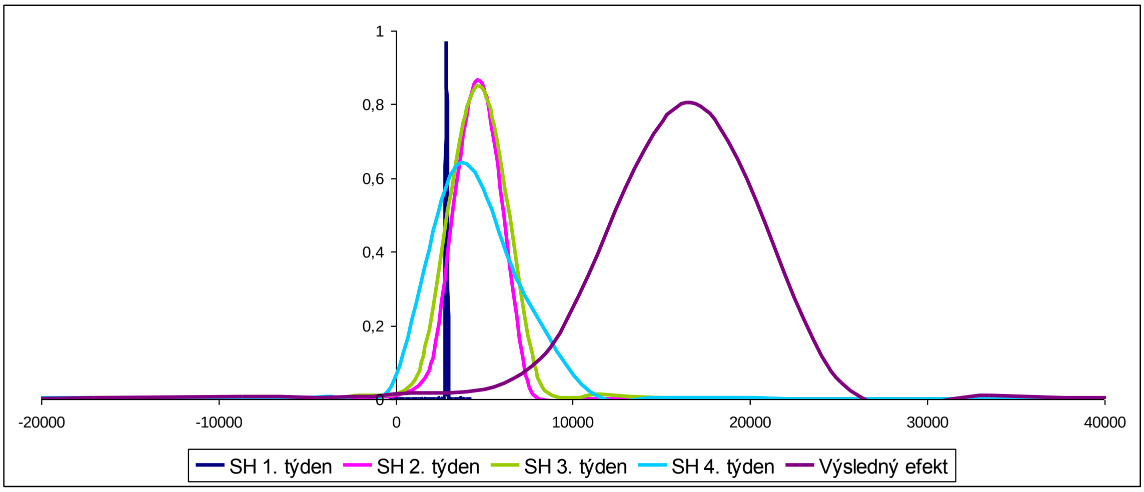
$$E = \sum_i \Pi_{i,t} \text{ , kde } i = 1,2,3,4. \tag{4.10}$$

Statický hedging

Charakteristikou statického hedgingu je, že je v počátku sestavení hedgingového portfolia stanoveno množství forwardových kontraktů, které se pak až do doby splatnosti kontraktů nemění.

Na Grafu 4.1 jsou zobrazeny rozdělení pravděpodobnosti v jednotlivých okamžicích vypořádání. Z grafu je patrné, že v případě statického hedgingu je nejúspěšnější zajištění v prvním týdnu. Menší rozptyl hodnoty portfolia zde podléhá právě tomu, že optimální množství zajišťovacích instrumentů je stanoveno pro tento okamžik a v dalších týdnech již portfolio neprochází žádnou revizí.

Graf 4.1 Rozdělení pravděpodobnosti efektů Statického hedgingu

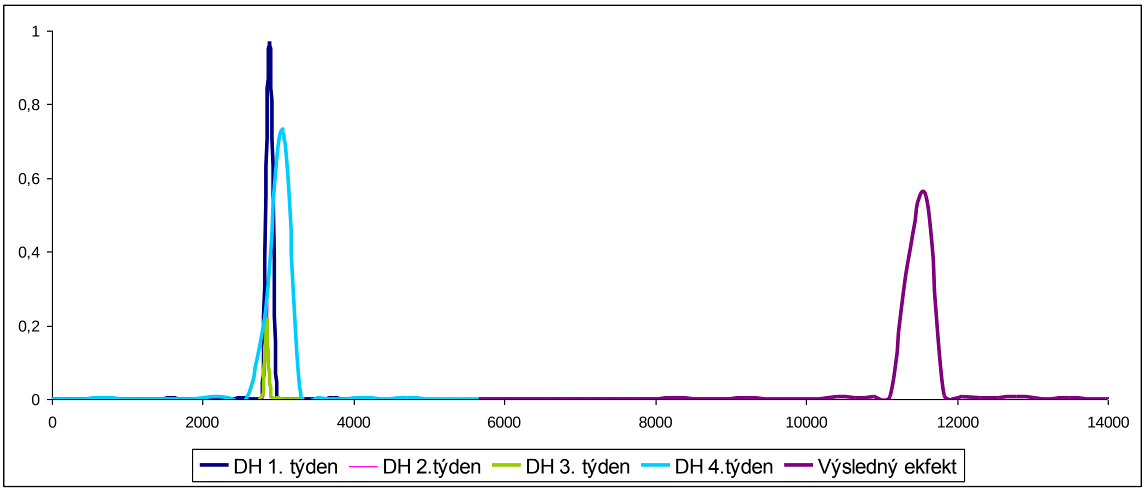


Dynamický hedging

Strategie dynamického hedgingu, na rozdíl od statického hedgingu, umožňuje postupné revize hedgingového portfolia, jinými slovy umožňuje v jednotlivých okamžicích vypořádání měnit množství forwardových kontraktů.

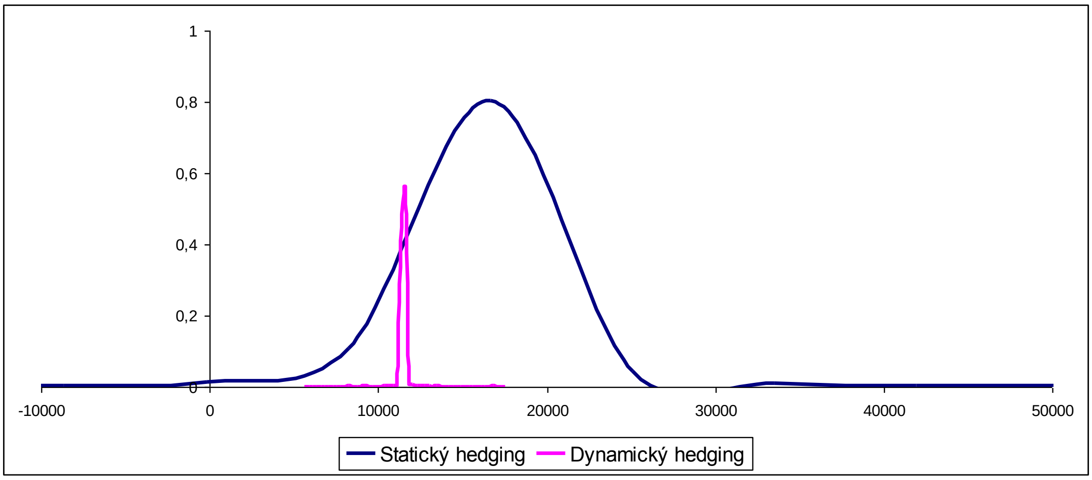
Z Grafu 4.2 lze na první pohled pozorovat větší výsledný efekt a nižší rozptyly všech rozdělení pravděpodobnosti. Na všech rozděleních pravděpodobnosti jsou zřejmé těžké konce typické pro Studentovo t-rozdělení.

Graf 4.2 Rozdělení pravděpodobnosti efektů Dynamického hedgingu



V následujícím Grafu 4.3 jsou porovnány rozdělení pravděpodobnosti výsledných efektů obou strategií. Z grafu je patrný špičatější tvar křivky dynamického hedgingu. Nižší rozptyl strategie dynamického hedgingu je dosažen právě dynamikou strategie, tedy pravidelnou obměnou hedgingového portfolia. Účinnějším zajištěním se dle tohoto grafu jeví použití dynamického hedgigu.

Graf 4.3 Porovnání výsledných efektů statického a dynamického hedgingu



Pasivní strategie

Pasivní strategii nelze v pravém slova smyslu považovat za formu hedgingu, protože při volbě této strategie subjekt nevyvíjí žádnou snahu se proti riziku zajistit. Mezi hlavní hedgingové strategie v této práci zařazena není. Je však uvedena z důvodu praktické ukázky.

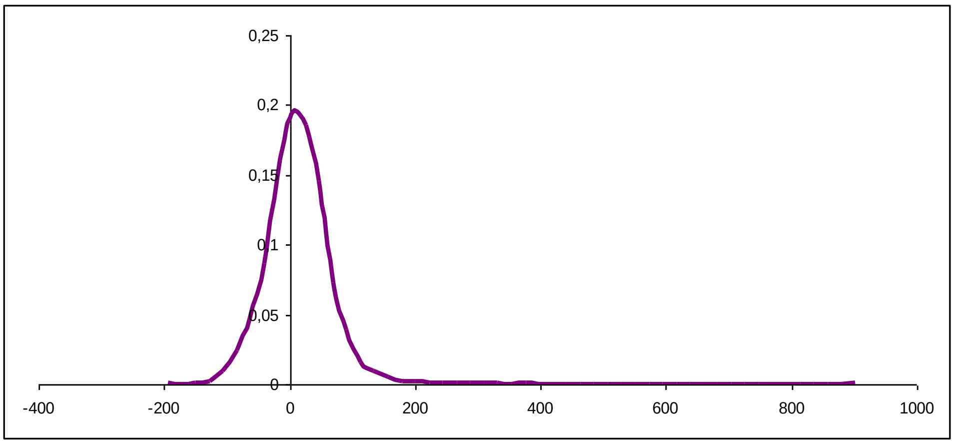
V případě investora, který by nakoupil po pěti akciích Telefónica O2 C.R. a Microsoft Corp. by byl, po měsíci držení akcií, výsledný efekt z dané transakce vyčíslen podle následujího vztahu, tedy

$$E = \sum_i Q_i \cdot \left(S_{i,T} - S_{i,0}\right). \qquad (4.11)$$

Výsledný efekt v číselném vyjádření může v závislosti na aktuální ceně akcií nabývat kladných nebo záporných hodnot. V případě posílení kurzů obou akcií, tedy obě akcie budou mít v okamžiku t hodnotu S_t větší než S_0, bude investor realizovat zisk. V opačném případě, tedy při oslabení kurzů obou akcií dojde ke ztrátě. Pokud dojde k oslabení kurzu jedné akcie a posílení druhé tak záleží na tom, která změna kurzu byla silnější.

Výsledek této strategie pro všech 1000 scénářů je zobrazen v Grafu 4.4. Z Grafu je zřejmé, že za měsíc držení akcií se celkový efekt s 19,4 % nachází v intervalu <3,3696;25,2687>.

Graf 4.4 Rozdělení pravděpodobnosti výsledného efektu pasivní strategie



4.5 Kriteriální zhodnocení zvolených hedgingových strategií

Nyní je nutné obě hedgingové strategie porovnat též pomocí zvolených kritérií. Vstupními údaji pro výpočet hodnot kritérií jsou hodnoty rozdělení pravděpodobnosti týkající se efektu z použití strategie.

Hodnotícími kritérii jsou tato kritéria.

- Střední hodnota ($\bar{x}$) určená jako aritmetický průměr, kdy je součet skupiny čísel vydělen počtem těchto čísel. Střední hodnotu lze v programu MS Excel určit pomocí funkce „PRŮMĚR".
- Směrodatná odchylka (σ) vyjadřující rozptýlenost hodnot souboru od střední hodnoty. Hodnotu směrodatné odchylky lze v MS Excel získat pomocí funkce „SMODCH". Matematicky je určena vztahem

$$\sigma = \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \; . \tag{4.12}$$

- Nejlepší výsledek, kterým je nejvyšší hodnota číselného souboru, je určen pomocí funkce „MAX".
- Nejhorší výsledek, kterým je nejnižší hodnota číselného souboru, je stanoven prostřednictvím funkce „MIN".
- Medián je hodnota, která se nachází přesně uprostřed číselného souboru. Polovina čísel souboru má vyšší hodnotu než medián a polovina čísel má hodnotu nižší než medián. Hodnota mediánu je v MS Excel nalezena pomocí funkce „MEDIAN".
- Kvantily jsou stanoveny na úrovních 5 %, 25 %, 75 % a 95 % pomocí funkce „PERCENTIL".

Hodnoty kritérií vztahující se k výslednému efektu strategií statického a dynamického hedgingu, jsou zachyceny v Tabulce 4.3. V Příloze 6 jsou pak pro porovnání zachyceny hodnoty kritérií postupně pro týdenní efekty strategií.

Tabulka 4.3 Výsledky hodnotících kritérií

Kritéria	Statický hedging	Dynamický hedging
σ	18151,62	570,24
σ^2	329804266,91	325499,02
$\bar{x}$	12206,56	11385,04
min	-59197,96	5659,36
max	362289,73	17532,41
median	11526,75	11374,96
Kvantil 5%	4722,46	11214,80
Kvantil 25%	10090,86	11325,51
Kvantil 75%	13162,43	11420,88
Kvantil 95%	17666,82	11558,31

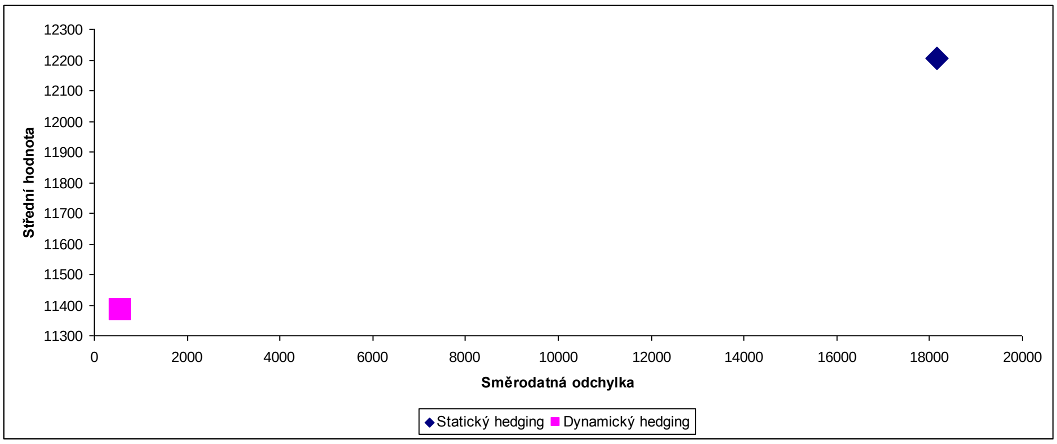
Kritéria střední hodnoty a mediánu obou strategií se svými hodnotami liší pouze nepatrně. Lepších výsledků však dosahuje strategie statického hedgingu. Také na základě kritéria nejlepšího výsledku lze posoudit strategii statického hedgingu jako výhodnější. Maximální hodnota efektu zde dosahuje až 362 289,73 Kč. Naopak kritérium nejhorší výsledek v případě statického hedgingu je nesmírně nízký. Efekt portfolia se zde dostává ke ztrátě skoro 60 000 Kč. Takto velký rozdíl mezi nejhorším a nejlepším výsledkem je způsoben vysokou směrodatnou odchylkou, která symbolizuje značný stupeň rizika strategie.

Z Tabulky 4.3 je zřejmé, že dynamický hedging je méně rizikovou strategií. Ve srovnání se statickým hedgingem dosahuje pozitivní hodnoty pro kritérium nejhoršího výsledku a nízké hodnoty směrodatné odchylky.

Také porovnáním hodnot kvantilů je zřejmý nadměrný rozptyl statického hedgingu a malý rozptyl dynamického portfolia.

Na Grafu 4.5 je zobrazen vztah výnos-riziko. Z měřítka osy y, charakterizující střední hodnotu je zřejmý malý rozdíl mezi oběma strategiemi. Výrazný rozdíl však lze pozorovat u kritéria směrodatné odchylky. Kdy se směrodatná odchylka dynamického hedgingu rovná 570 Kč a u statického hedgingu se nachází za hranicí 18 000 Kč. Na základě toho, že byl použit princip hedgingové strategie minimalizace rozptylu, lze konstatovat, že je investor averzní k riziku a požaduje tedy kritérium minimalizovat. Z tohoto hlediska je pak výhodnější strategie dynamického hedgingu, která dosahuje přiměřeného výnosu a malého rizika.

Graf 4.5 Porovnání strategií z hlediska vztahu výnos-riziko



Shrnutí porovnání strategií

Z výše uvedených grafů rozdělení pravděpodobnosti výsledného efektu strategií, porovnání vztahu výnos-riziko a tabulky hodnot kritérií lze posoudit jako výhodnější strategii dynamického hedgingu. Tento závěr je podložen skutečností, že i při velmi podobných výsledcích středních hodnot strategií je pozorován vysoký rozdíl směrodatných odchylek, tzn. statický hedgnig je oproti dynamickému značně rizikovější.

5 Závěr

Cílem diplomové práce bylo ověření a porovnání vybraných portfoliových hedgingových strategií.

První část práce (druhá kapitola) byla věnována k vysvětlení základních pojmů, jako je např. vymezení finančního rizika, typy pozic či popis subjektů trhu. Dále byly popsány typy možných hedgignových strategií, druhy finančních derivátů a optimalizační úloha Lagrangeův multiplikační teorém.

Druhá část práce (třetí kapitola), týkající se charakteristiky a stanovení parametrů finančních instrumentů, byla rozdělena na část teoretickou a praktickou. V teoretické části byly nejdříve popsány druhy rozdělení pravděpodobnosti, dále byla věnována pozornost stanovení volatility a popisu metody simulace Monte Carlo.

Praktická část práce je věnována modelovém případu investora, který vloží své finanční prostředky dvou rizikových aktiv, a to do akcií Telefónica O2 C.R. a Microsoft Corp. Zajištění je provedeno pomocí forwardových kontraktů na akcie Unipetrol, McDonalds Corp. a Volkswagen AG. Investice je nastavena na jeden měsíc, kdy se od počátku provádí vypořádání na konci každého týdne. Vypořádání tak proběhne čtyřikrát.

V praktické části třetí kapitoly byly propočteny parametry daných finančních instrumentů, jako jsou střední hodnota, směrodatná odchylka nebo sestavení korelační a kovarianční matice výnosů aktiv. Nalezen byl také pomocí metody Maximální věrohodnosti parametr stupeň volnosti. Dále bylo empirické rozdělení pravděpodobnosti výnosů aktiv porovnáno s normovaným normálním rozdělením a standardizovaným Studentovým t-rozdělením. Na základě grafů rozdělení pravděpodobnosti viz Příloha 3, je konstatováno, že empirické rozdělení pravděpodobnosti výnosů aktiv se blíží standardizovanému Studentovu t-rozdělení. Při následné simulaci cenového vývoje pomocí metody Monte Carlo byla generována náhodná čísla ze Studentova t-rozdělení. Takto simulované ceny tak podávají reálnější obraz o vývoji aktiv, než v případě generování náhodných čísel pomocí aplikace G*enerátor náhodných čísel*, jež generuje náhodná čísla z normovaného normálního rozdělení.

Poslední, čtvrtá kapitola, byla věnována způsobu sestavení portfoliového hedgigového portfolia a následně porovnání dvou hedingových strategií. Hedgingová portfolia, sestavená na základě strategie minimalizace rozptylu, byla porovnána z hlediska dynamiky, tj. statický a dynamický hedging. Principem statického hedgingu je, že se na začátku stanoví optimální množství zajišťovacích instrumentů, které se během jednotlivých vypořádání nemění. Dynamický hedging spočívá v postupných revizích, tedy změnách optimálního množství forwardových kontraktů.

Nejprve byly oceněny zajišťovací nástroje a poté bylo pomocí optimalizační úlohy *Lagrengeův multiplikační teorém*, jež bere v úvahu korelace mezi všemi aktivy, nalezeno optimální množství těchto instrumentů v hedgingovém portfoliu. Obě strategie byly porovnány podle rozdělení pravděpodobností výsledných efektů těchto strategií a dále pomocí kritérií střední hodnota, směrodatná odchylka, nejlepší a nejhorší výsledek a medián.

Na základě toho, že byl použit princip hedgingové strategie minimalizace rozptylu lze z hlediska rozdělení pravděpodobnosti i kritéria směrodatné odchylky a nejhoršího výsledku hodnotit jako méně rizikovou strategii dynamického hedgingu. I když jsou hodnoty kritérií střední hodnoty a mediánu nepatrně lepší u strategie statického hedgingu, lze tuto statickou strategii z hlediska minimalizace rozptylu hodnotit jako velmi rizikovou a tím pádem méně vhodnou. Také z hodnot nejlepšího a nejhoršího výsledku statického hedgingu lze pozorovat velmi vysoký rozptyl. Rozdílná rizikovost je dána právě dynamičností strategií, kdy dynamická strategie prochází postupnými revizemi. Ke každému týdennímu vypořádání je přiděleno optimální množství forwardových kontraktů, provedené revize potom zajišťují velmi nízkou hodnotu rozptylu portfolia.

Výsledkem této práce tedy bylo zjištění, že se pravděpodobnostní rozdělení výnosů finančních aktiv blíží Studentovu t-rozdělení. Použitím Studentova t-rozdělení pro simulaci vývoje aktiv je tak dosáhnuto reálnějších výsledků. Z hlediska dynamičnosti je pak hodnocena lépe strategie dynamického hedgingu, která má sice nepatrně nižší výnos než strategie statického hedgingu, avšak díky nízké směrodatné odchylce je vystavena nižšímu riziku.

Seznam použité literatury

Knihy:

1. ALEXANDER, C.; *Market Risk Analysis, Volume I, Quantitative Methods in Finance.* John Wiley & Sons Ltd, 2008. 290 s. ISBN 978-0-470-99800-7.

2. GOURIEROUX, Ch.; JASIAK, J. *Financial econometrics: probléme, models, and methods*. Princeton: Princeton University Press, 2001. 513 s. ISBN 978-0-691-08872-3.

3. HULL, J. C. *Options, futures & other derivates.* 5th ed. New York: Prentice Hall, 2003. 744 s. ISBN 0-13-009056-5.

4. JÍLEK, J. *Finanční a komoditní deriváty*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, spol. s r.o., 2002. 624 s. ISBN 80-247-0342-4.

5. JÍLEK, J. *Finanční rizika*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, spol. s r.o., 2000. 635 s. ISBN 80-7169-579-3.

6. JORION, P. *Financial risk manager handbook 2001-2002*. New York: Wiley, 2001. 808 s. ISBN 0-471-09372-6.

7. LUENBERGER, D.G.; *Microeconomic Theory*. McGraw-Hill, Inc., 1995. 486 s. ISBN 0-07-049313-8.

8. TICHÝ, T. *Finanční deriváty*. 1. vyd. VŠB – TU Ostrava, 2006. 172 s. ISBN 80-248-1180-4.

9. ZMEŠKAL, Z. a kol. *Finanční modely*. 2. vyd. Praha: EKOPRESS, s.r.o., 2004. 236 s. ISBN 80-86119-87-4.

10. ZMEŠKAL, Z., ČULÍK, M., TICHÝ, T. *Finanční rozhodování za rizika: Sbírka řešených příkladů*. 2. dopl. vyd. 2005. 149 s. ISBN 80-248-0840-4.

Články:

1. TICHÝ, T. Posouzení metody částečného hedgingu na případu řízení měnového rizika nefinanční instituce. *Ekonomická revue –Central European Review of Economic Issues*, 12, 2009.

2. ZMEŠKAL, Z., Přístupy k eliminaci finančních rizik na bázi finančních hedgingových strategií. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance*, 54, 2004.

Internet:

1. RM-Systém <http://www.rmsystem.cz/kurzy-online/akcie/easyclick>, ze dne 17. února 2010.

2. ČNB <http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp?date=DD.MM.RRRR>, ze dne 23. března 2010.

Seznam zkratek

ATM	- at the money
c	- cena call opce
C	- korelační matice
dt	- doba do splatnosti
e^{-rT}	- spojitý diskontní faktor
E	- efekt hedgingové strategie
$E(R)$	- střední hodnota výnosu
ITM	- in the money
f	- finanční derivát
h	- množství zajišťovacích instrumentů (zajišťovací poměr)
L	- Lagrangeova funkce; funkce metody Maximální věrohodnosti
ln	- logaritmus
max	- maximalizace
min	- minimalizace
N	- množství podkladových aktiv na jeden finanční derivát
Obr.	- obrázek
OTM	- out of the money
p	- cena put opce
P_t	- cena aktiva v čase *t*
Q	- množství rizikových aktiv
q_i	- počet aktiv
r	- bezriziková sazba
r_t	- spojitý výnos
str.	- strana
St	- cena aktiva
T	- doba zralosti
t	- čas
tj.	- to je
t_v	- Studentovo t-rozdělení
tzn.	- to znamená

$U(x)$	- střední hodnota funkce užitku
var	- rozptyl
VaR	- Value at Risk
VH	- vnitřní hodnota
X	- realizační cena
x_i	- podíl aktiv
z	- standardní normální náhodná proměnná
α	- hladina významnosti
α, β, ω	- parametry (GARCH)
∂	- znak pro derivaci
∇	- derivace vektoru
Δ	- delta; změna parametru
ε_t^2	- skutečný rozptyl
Γ	- gamma funkce
$\varphi(x)$	- funkce hustoty
λ	- tlumící faktor; reálné číslo, parametru nutný pro sestavení Lagrangeova multiplikačního teorému
μ	- střední hodnota
$\rho_{\Delta S \Delta f}$	- korelace výnosů finančních aktiv
π	- Ludolfovo číslo
Π_t	- hodnota portfolia v čase t
σ^2	- rozptyl
σ	- volatilita
v	- stupně volnosti

Seznam obrázků

Obrázek 2.1 Vliv diverzifikace na systematické, jedinečné a celkové riziko portfolia

Obrázek 2.2 Efekt různých stupňů zajištění hodnoty portfolia

Obrázek 2.3 Výplatní funkce forwardového kontraktu – dlouhá pozice

Obrázek 2.4 Výplatní funkce forwardobého kontraktu – krátká pozice

Obrázek 2.5 Vnitřní hodnota a zisk call opce, dlouhá pozice (kupující)

Obrázek 2.6 Vnitřní hodnota a zisk call opce, krátká pozice (prodávající)

Obrázek 2.7 Vnitřní hodnota a zisk put opce, dlouhá pozice (kupující)

Obrázek 2.8 Vnitřní hodnota a zisk put opce, krátká pozice (prodávající

Seznam tabulek

Tabulka 2.1 Hlavní rozdíly mezi kontrakty typu forward a futures

Tabulka 3.1 Hodnoty parametrů akcií

Tabulka 3.2 Korelace výnosů aktiv

Tabulka 3.3 Kovariance výnosů aktiv

Tabulka 3.4 Vstupní hodnoty pro provedení simulace

Tabulka 4.1 Vstupní hodnoty pro ocenění forwardového kontraktu

Tabulka 4.2 Praktická ukázka nalezení množství zajišťovacích instrumentů (1. krok, 1. scénář)

Tabulka 4.3 Výsledky hodnotících kritérií

Seznam grafů

Graf 3.1 Funkce hustoty

Graf 3.2 Distribuční funkce

Graf 3.3 Grafické srovnání normovaného normálního rozdělení se standardizovaným Studentovým t-rozdělením

Graf 3.4 Vývoj ceny akcie Telefónica O2 C.R.

Graf 3.5 Spojité výnosy akcie Telefónica O2 C.R.

Graf 3.6 Rozdělení pravděpodobnosti výnosů akcie Telefónica O2 C.R.

Graf 3.7 Simulované hodnoty ceny akcie Telefónica O2 C.R. (vývoj ceny závisí na standardizovaném Studentovu rozdělení)

Graf 3.8 Simulované hodnoty ceny akcie Telefónica O2 C.R. (vývoj ceny závisí na normovaném normálním rozdělení)

Graf 4.1 Rozdělení pravděpodobnosti efektů statického hedgingu

Graf 4.2 Rozdělení pravděpodobnosti efektů dynamického hedgingu

Graf 4.3 Porovnání výsledných efektů statického a dynamického hedgingu

Graf 4.4 Rozdělení pravděpodobnosti výsledného efektu pasivní strategie

Graf 4.5 Porovnání strategií z hlediska vztahu výnos - riziko

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 30. dubna 2010

…………………………
jméno a příjmení studenta

Adresa trvalého pobytu studenta:

…………………………………
…………………………………

Seznam příloh

Příloha 1: Grafické zobrazení vývoje cen a spojitých výnosů aktiv

Příloha 2: Postup pro nalezení vhodného pravděpodobnostního rozdělení pro akcii Telefónica O2 C.R.

Příloha 3: Rozdělení pravděpodobnosti výnosů akcií

Příloha 4: Simulace cen akcií podle normovaného normálního rozdělení a standardizovaného Studentova t-rozdělení

Příloha 5: Porovnání portfoliových hedgingových strategií

Příloha 6: Výsledky hodnotících kritérií pro týdenní efekty strategií